

BIBLIOTECA NAZ.

Vittorio Emanuele III

XXIII

C

42

NAPOLI









XXXIII

G.

42.

~~54~~.



C O U R S
D E
MATHEMATIQUE ,
QUI CONTIENT;

TOUTES LES PARTIES DE CETTE SCIENCE;
MISES A LA PORTÉE DES COMMENÇANS.

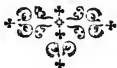
PAR M. CHRETIEN WOLF,

*Professeur de Mathématique & de Philosophie dans l'Uni-
versité de Hale , Membre des Académies Royales des
Sciences de France , d'Angleterre & de Prusse.*

Traduit en François & augmenté considérablement par
D. ***, de la Congrégation de Saint Maur

TOME PREMIER.

*Q'U'IL renferme l'Arithmétique , l'Algèbre , la Géométrie ,
la Trigonometrie rectiligne , la Mécanique , l'Hydrosta-
tique , l'Airometrie & l'Hydraulique.*



A PARIS, QUAY DES AUGUSTINS,

Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire
du Roy pour l'Artillerie & le Génie , au coin de la
rue Gille-cœur , à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XLVII.

Avec Approbation & Privilège du Roy:







P R E F A C E

D U T R A D U C T E U R .

RIEN de plus propre à joindre l'agréable à l'utile que les Mathématiques. On le sçait , & on l'a reconnu particulièrement dans notre siècle , où l'on a trouvé l'heureux secret d'unir la solidité des sciences abstraites avec la politesse des connoissances du goût. Ce n'est plus un terrain herissé d'épines & d'un difficile accès ; on se livre avec satisfaction aux méditations profondes que demandent les mathématiques , quand on est capable de goûter le plaisir que procure la découverte des vérités qui en font l'objet ; & l'on regarderoit avec raison comme des esprits superficiels, de peu de consistance , & sans goût , ceux qui s'en formeroient l'idée comme d'une science austere & sauvage , qui ne sauroit s'allier avec la délicatesse des belles Lettres.

L'objet des Mathématiques est la vérité pure ; ses preuves sont des démonstrations exactes , & ses effets des choses surprenan-

res. Nous avons peu de commodités dans la vie, peu d'embellissemens dans tout ce qui se présente à nos yeux, dont nous ne soyons redevables à ceux qui ont consacré leurs veilles à cultiver cette Science, qu'on regarde à juste titre comme la clef de toutes les autres. Y a-t-il rien de plus merveilleux que toutes ces machines animées, si j'ose le dire, par les Mathématiques, qui dirigent l'arrangement de leurs ressorts, régulent leur mouvement, & conduisent toutes leurs opérations. Quoi de plus admirable, que ces instrumens qui décorent les boutiques des artisans, & qui certainement ne manqueroient pas de spectateurs, si nous sçavions admirer l'esprit & l'invention qui y brille par tout. L'envie de sçavoir si naturelle à l'homme se réveilleroit à cet aspect: ce désir ardent d'acquiescer toujours de nouvelles connoissances, se ranimeroit à la vûe de si belles choses. Car l'esprit de l'homme veut tout sçavoir; & rien ne marque mieux combien il est destiné à la vérité, que le charme qu'il éprouve quelque-fois malgré lui, dans les spéculations les plus seches de l'algèbre.

Les Mathématiques, en ouvrant l'esprit, dévelopent ses facultés, lui en ménagent l'usage, & le forment à la précision. Elles l'habituent à l'attention en le fixant,

elles lui donnent de l'étendue en multipliant ses lumieres, de la pénétration & de la délicatesse par l'exercice ; leur méthode y grave insensiblement cet ordre dans les idées & cette justesse de raisonnement qui rendent un homme véritablement homme. Mais la méthode qui produit de si beaux fruits , est celle des anciens Géomètres , & de laquelle nous remettons à parler dans le discours préliminaire , à la suite de cette Préface.

Le grand ouvrage que M. Wolf avoit donné selon cette méthode , premièrement en Allemand , puis en latin , ayant paru d'une trop grande étendue pour le donner en leçons dans le tems fixé pour un cours de Mathématiques , il en fit un abrégé pour l'usage particulier des Ecoles ; mais cet abrégé est si succinct que je n'ai pas cru devoir me contenter d'en donner une simple traduction. Je suis entré dans un plus grand détail ; j'ai changé quantité de choses qui ne me paroissent pas du goût François : j'ai souvent étendu le discours beaucoup plus qu'il ne l'étoit dans l'original , j'ai inferé des remarques , sans les distinguer du texte , dans bien des endroits où je les ai cru nécessaires. J'ai ajouté quantité de définitions des termes & des choses ; des supplémens à certains traités ,

des traités même entiers , pour rendre l'ouvrage complet ; tels sont l'arithmétique palpable dans le premier volume , la Navigation dans le second , & les Feux d'Artifice dans le troisième , dans lesquels je n'ai suivi M. Wolf, pour ainsi dire , que dans la Méthode. Ces augmentations & ces changemens m'ont obligé d'augmenter de près de la moitié le nombre des planches, dont j'ai changé la plus-part des desseins , & les ai fait graver avec plus d'élégance & de goût : de maniere que c'est un ouvrage tout nouveau, ou du moins si différent de ce que M. Wolf avoit dit sur ces matieres, qu'il ne s'y reconnoîtroit pas lui-même. Les lecteurs trouveront dans ces trois volumes , non-seulement de quoi se former une idée des Sciences qui y sont traitées, mais tout ce qu'il faut pour être en état de les entendre, d'en parler avec exactitude, & de les étudier par eux-mêmes dans les livres qui en traitent plus au long. Le Public attendoit cette traduction avec impatience ; il est heureux pour moi d'avoir travaillé à la satisfaire , mais je m'estimerai plus heureux encore , si mon travail remplit pleinement les vûes que je me suis proposées.

AVIS AU RELIEUR

Pour placer les 69 Planches de cet Ouvrage.

Toutes les Planches se plieront en trois, en conservant le papier blanc pour les faire sortir hors du livre, & se placeront à la fin du Traité auquel elles appartiennent, dans l'ordre suivant.

TOME PREMIER.

1. La Planche d'Arithmétique à la fin de ce Traité *page 79*
- o. Il n'y a point de Planches au Traité d'Algebre.
8. Les 8 Planches de Géométrie à la fin des Elemens de Géométrie, *page 252*
1. La Planche de Trigonometrie à la fin de ce traité, *page 274*
3. Les trois Planches de Mécanique, à la fin de la Mécanique, *page 226*
1. La Planche d'Hydrostatique & d'Airométrie, qui ne fait qu'une seule Planche, à la fin de l'Airometrie, *page 368*
2. Les deux Planches d'Hydraulique, à la fin du premier volume, *page 388*

TOME SECONDE.

1. La Planche d'Optique à la fin de ce Traité, *page 26*
1. La Planche de Catoptrique, à la fin de la Catoptrique, *page 47*
2. Les deux Planches de Dioptrique à la fin des Elemens de Dioptrique, *page 82*
6. Les six Planches de Perspective, à la fin de ce Traité, *page 114*
1. La Planche de Géographie, à la fin de la Géographie, *page 150*
- o Il n'y a point de Planches au Traité de Chronologie.
4. Les quatre planches de Gnomonique à la fin des Elemens de Gnomonique. *page 206*
3. Les trois Planches d'Astronomie à la fin de ce Traité, *page 323*

2. Les deux Planches de Navigation à la fin du second volume , *page 357*

TOME TROISIEME.

6. Les six Planches de la Fortification se placeront à la fin des Elemens de Fortification, *page 61*
5. Les cinq Planches d'Attaque des Places, à la fin de l'Attaque & Deffense des Places, *page 102*
6. Les six Planches d'Artillerie, à la fin de l'Artillerie, *page 148*
1. La Planche des feux d'Artificé, après ce Traité, *page 210*
15. Les quinze Planches d'Architecture à la fin du tome troisieme, avant la Table des Matieres, *page 326*



DISCOURS



DISCOURS PRELIMINAIRE

*SUR LA METHODE DONT ON SE
sert pour traiter les Mathématiques.*

§. I.

LA *Méthode Mathématique* n'est autre chose que l'ordre que suivent les Mathématiciens en traitant les Sciences qui font partie des Mathématiques. On commence par les *Définitions*, on continue par les *Axiomes*, d'où l'on forme des *Théorèmes*, & puis des *Problèmes*, qui produisent des *Corollaires*, & l'on y lie des *Remarques*, selon que les uns ou les autres en ont besoin.

§. II.

Les *Définitions* sont des notions claires & distinctes par le moyen desquelles on distingue non-seulement une chose d'avec une autre, mais qui nous y font encore découvrir tout ce qu'on peut en concevoir. On les réduit à deux sortes, les *Définitions nominales*, & les *Définitions réelles*, ou si l'on veut, *Définitions des noms* & *Définitions des choses*.

Tome I.

§. III.

Les définitions des noms renferment des marques suffisantes pour faire distinguer une chose qui porte tel ou tel nom , d'avec une autre chose , qui en porte un différent. Comme lorsqu'on dit dans la Géométrie , le quarré est une figure qui a quatre angles & quatre côtés.

§. IV.

Les définitions réelles expliquent clairement la formation des choses , c'est-à-dire , la maniere dont elles se font. Telle est , par exemple , la définition du cercle dans la Géométrie ; lorsqu'on dit qu'il se fait par le mouvement d'une ligne droite autour du point fixe.

§. V.

La *Notion* est la représentation que l'esprit se forme de quelque chose que ce puisse être.

§. VI.

La *Notion claire* est celle qui suffit pour reconnoître une chose qui nous est présentée ; pour dire , par exemple , une telle figure est un *Triangle*.

§. VII.

La *Notion obscure ou confuse* est au contraire celle qui ne suffit pas , pour déterminer précisément ce que c'est que telle chose. Si l'on me montre ;

PRELIMINAIRE. iiij

par exemple , une plante , & que l'ayant examinée , je doute encore si je l'ai vûe ailleurs , ou si cette plante est celle qui porte tel ou tel nom , c'est alors une notion obscure.

§. VIII.

Une notion claire *est distincte* , lorsqu'on peut expliquer les marques auxquelles on reconnoît la chose qu'on nous présente ; par exemple , que le cercle est une figure terminée par une ligne courbe , revenant sur elle-même , dont chaque point est également éloigné de celui qui est au centre.

§. IX.

Une notion claire *est confuse* quand vous ne pouvez dire ce à quoi vous reconnoissez telle chose quoiqu'elle ait néanmoins des marques qui la distinguent des autres. Telle est , par exemple la notion qu'on a de la couleur rouge.

§. X.

La notion distincte est *entiere* , & peut être censée *parfaite* , lorsque vous connoissez distinctement toutes les parties qui composent une chose , & les marques qui vous la font distinguer d'une autre. Par exemple la notion du cercle dont je viens de parler (§. VIII.) est censée une notion parfaite , si vous avez une connoissance distincte d'une courbe qui retourne sur elle-même , d'un point placé au milieu , d'une égalité de distance , & de la termination.

e ij

§. XI.

La notion est au contraire *imparfaite*, si l'on n'a que des connoissances confuses & obscures des parties de la chose, & des marques qui la distinguent d'une autre.

§. XII.

On n'admet dans les Mathématiques que des notions distinctes, & même autant entières & parfaites qu'elles peuvent l'être, quand il s'agit de donner des définitions des noms & des choses.

§. XIII.

Ainsi dans les définitions contenues dans cet ouvrage, on n'emploiera que des termes assez intelligibles par eux-mêmes, ou dont l'explication aura précédée.

§. XIV.

Lorsque nous nous contentons d'une notion confuse, nous supposons qu'on peut avoir aisément entre les mains les choses dont on veut parler, pour s'en instruire par ses propres yeux; ou que l'ayant vûe souvent, il sera facile de se la retracer dans la mémoire.

§. XV.

Quant aux définitions réelles, elles nous apprennent comment la chose est possible; c'est-à-

PRELIMINAIRE.

v

dire , la voye qu'il faut tenir , & la maniere de former cette chose (§. IV.) Voilà pourquoi il y a deux choses à observer sur cette espèce de définition ; 1°. Sçavoir si ce qui doit concourir à la formation de la chose existe , ou peut exister ? 2°. Si elles ont véritablement les propriétés que nous leur attribuons ; par exemple , s'il est vrai *qu'un cercle se puisse faire par le mouvement d'une ligne droite autour & à égale distance d'un point fixe.* Il faut pour que la chose soit possible , un point , une ligne droite , l'immobilité d'un point , qui puisse régler le mouvement de la ligne ; & enfin un mouvement de la ligne tel qu'elle retourne au point même d'où elle étoit partie.

§. XVI.

On peut considérer les définitions de noms & les définitions réelles en elles-mêmes , & les comparer les unes aux autres. Lorsqu'en les considérant on en conclut immédiatement quelque chose , ce qu'on en conclut s'appelle *Axiome*. En examinant , par exemple , la formation d'un cercle , on en conclut aisément , que toutes les lignes , menées du centre à la circonférence , sont égales , puisqu'elles ne représentent qu'une même ligne placée en différens endroits du cercle , & voilà pourquoi cette proposition passe pour un axiome : M. de Tschirnausen prend ce terme dans ce sens-là. On appelle communément *Axiome* , toute proposition qui est si évidente , qu'elle n'a pas besoin de démonstration ; ce qui est conforme à l'idée qu'Euclide & les autres anciens Géomètres en ont eu.

e iij

§. XVII.

Les axiomes expriment l'existence d'une chose ; ou sa possibilité. Ceux de la première espèce sont ceux dont nous venons de donner un exemple ; à sçavoir *toutes les lignes menées du centre d'un cercle à sa circonférence , sont égales entr'elles*. Les axiomes de la seconde espèce sont , par exemple , la proposition qui naît de la définition de la ligne droite : à sçavoir que *d'un point à un autre point on peut tirer une ligne droite*. Les axiomes de cette espèce s'appellent *Pétitions* ou *demandes*.

§. XVIII.

Comme la vérité de ces deux espèces d'axiomes est connue par le seul aspect des définitions d'où ils naissent , ils n'ont besoin d'aucune démonstration. Car cette même vérité devient évidente par la seule preuve de la réalité des définitions. C'est pourquoi on ne peut porter un jugement certain sur la vérité ou la fausseté d'un axiome , avant d'avoir examiné la possibilité de la définition. Autrement on seroit simplement assuré que l'axiome sera vrai , si l'on suppose la définition possible,

§. XIX.

On confond quelquefois ces deux espèces d'axiomes avec les expériences. Or nous disons *sçavoir une chose par expérience* , lorsque la connoissance que nous en avons , nous est venue de l'attention que nous avons faite sur nos propres perceptions ; par exemple , lorsqu'on allume une

PRELIMINAIRE. vij

chandelle dans un lieu obscur, nous voyons autour de nous bien des choses que nous n'apercevions pas auparavant; nous disons alors que nous sçavons par expérience qu'on ne peut voir dans l'obscurité, sans lumière. Les expériences ne sont donc que des propositions qui regardent des choses particulières, puisque nous n'apercevons les choses qu'en particulier.

§. XX.

Lorsqu'ayant comparé plusieurs définitions les unes avec les autres, nous en inférons quelque proposition que nous n'aurions pû tirer de l'examen d'une seule, la conclusion que nous en tirons s'appelle *Théorème*. Par exemple, dans la Géométrie, je compare un triangle avec un parallélogramme posés sur la même base, & ayant même hauteur. J'infere partie de leurs définitions, partie de leurs propriétés déjà connues, qu'un tel parallélogramme est le double du triangle; alors cette proposition, *un triangle est la moitié d'un parallélogramme, qui a même base & même hauteur*, est un *Théorème*.

§. XXI.

Deux choses dans les *Théorèmes* demandent beaucoup d'attention. La *proposition* en elle-même & la *démonstration*. La première indique ce qui peut convenir ou non à une chose, certaines conditions une fois posées; la seconde donne & explique les raisons qui nous font concevoir que cela convient à une telle chose, ou ne lui convient pas.

§. XXII.

Les principes des démonstrations sont en partie les définitions des termes & des choses contenus dans la proposition , & en partie les propriétés que nous découvrons des choses dans leurs définitions. Or comme on n'admet point de principes dans les Mathématiques , qui n'ayent été prouvés auparavant , on cite communément les définitions & les propositions d'où on les a tiré ; tant pour montrer la simplicité & la vérité des principes sur lesquels on établit son raisonnement , que pour indiquer à ceux qui ne sont pas bien au fait , les sources de la certitude de ces mêmes principes.

§. XXIII.

La méthode qu'on suit dans les Mathématiques pour tirer les conséquences des principes , est la même que celle qu'on trouve dans les traités de Logique , où l'on parle du syllogisme : car les démonstrations des Mathématiciens , ne sont autre chose qu'un assemblage d'enthymêmes ; de façon qu'on y conclut tout par la force des syllogismes , excepté qu'on omet souvent les premices , qui se présentent d'eux-mêmes à l'esprit , ou que l'on rappelle dans la mémoire à l'aide des citations. Clavius prouve ce que nous venons de dire dans sa démonstration de la première proposition des Elémens d'Euclide ; Herlinus & Dasipodius ont démontré par des syllogismes en forme , les six premiers Elémens d'Euclide , & Henischius toute l'Arithmétique.

§. XXIV.

Les *Problèmes* proposent quelque chose à faire ; & sont composés de trois parties qui sont la *proposition*, la *Solution* & la *Démonstration*. Dans la proposition on indique ce qu'on propose à faire ; la Solution donne par ordre tous les moyens de réussir à faire la chose proposée ; & la démonstration prouve qu'on doit nécessairement en venir à bout , en suivant la méthode & les moyens que la solution prescrit. C'est pourquoi toutes les fois qu'un problème a besoin de démonstration , on le convertit en Théorème , dont la proposition constitue la question , & la solution forme l'*hypothèse*. Car telle est ordinairement la teneur de tous les Problèmes , auxquels il faut une démonstration ; & en suivant ce que prescrit la Solution , on fait en même tems la chose proposée.

§. XXV.

On est quelquefois obligé d'appliquer à certains cas particuliers des propositions générales , d'où l'on tire souvent d'autres propositions dont la conséquence est aisée. Alors ces propositions se nomment *Corollaires*.

§. XXVI.

Dans les *Remarques* ou *Scholies* , on dit ce qu'il y a d'obscur ; on répond aux choses qui sont douteuses ; on indique l'usage des Sciences , les sources où l'on peut étudier les matières , les Auteurs qui en ont traité ; enfin tout ce qu'il est bon , utile & agréable à sçavoir.

§. XXVII.

Tout homme qui fera un peu d'attention à la méthode que nous venons d'expliquer, verra facilement qu'elle est universelle, & qu'on ne peut guere, sans la suivre, parvenir à une solide connoissance des choses. On lui a donné le nom de *Methode Mathématique*, & même souvent celui de méthode *des Géomètres*, parce que les Mathématiciens ont été jusqu'ici presque les seuls qui l'ayent suivi scrupuleusement.

§. XXVIII.

La méthode dont nous venons de parler étant si conforme au goût universel, & à la façon commune de raisonner, est-il surprenant qu'on regarde les *Mathématiques* comme l'étude la plus propre à donner de l'ouverture à l'esprit, & à former le jugement ? On remarque dans ceux qui cultivent cette science, une facilité & une promptitude étonnante à saisir le vrai des autres sciences auxquels ils s'appliquent dans la suite ; pendant que tant d'autres qui d'ailleurs ont de l'esprit, de la force d'imagination, du jugement même, ont tant de peine à en venir à bout ; & cela parce qu'ils ne se sont pas formés l'habitude d'un certain ordre & d'une certaine exactitude dans leurs jugemens.

§. XXIX.

Tous ceux qui employent donc tout leur tems à l'étude de certaines pratiques & de certaines sciences qui ne font point partie des *Mathématiques*

ques ; mais qu'on regarde communément comme leur appartenantes , n'en retireront jamais tout le fruit qu'on peut se promettre de l'étude des Mathématiques. Car quoique ces sortes de sciences soient d'ailleurs fort utiles au commerce de la vie , elles ne seront jamais bien capables de leur donner cette force d'esprit , cette vivacité , & cette habitude d'invention que l'on puise dans l'étude des véritables Mathématiques ; parce que tout cela est le fruit des méditations & des réflexions sérieuses que l'on fait sur les démonstrations.

La *Méthode* est l'art de bien disposer une suite de plusieurs raisonnemens , tant pour découvrir la vérité d'un Théorème , quand nous l'ignorons , que pour la démontrer aux autres , quand nous l'avons trouvée. Il y a deux méthodes générales pour rechercher les vérités dans les Mathématiques ; sçavoir la *Synthèse* & l'*Analise*. Celle dont on se sert pour résoudre un Problème mathématique se nomme *Zétéique* , & celle qui détermine quand & par quelle raison , & en combien de façons un Problème peut se résoudre , s'appelle *Poristique*.

La *Synthèse* est l'art de chercher les vérités ou les démonstrations , la possibilité ou l'impossibilité d'une proposition , par des raisonnemens tirés des principes ; c'est-à-dire , par des propositions qui se démontrent l'une par l'autre , en commençant par les plus simples , pour passer aux plus générales & plus composées , jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la *Conclusion* , qui nous donne une connoissance claire & distincte de la vérité qu'on cherche.

L'*Analyse* est l'art de découvrir la vérité ou la fausseté , la possibilité ou l'impossibilité d'une pro-

position par un ordre contraire à celui qu'on suit dans la synthèse ; sçavoir en supposant la proposition telle qu'elle est , & en examinant ce qui s'ensuit de - là , jusqu'à ce qu'on soit venu à quelque vérité claire , ou à quelque impossibilité , dont ce qui a été proposé soit une suite nécessaire , pour conclure de-là la vérité ou l'impossibilité de la proposition.

L'hypothèse est une supposition de ce qui n'est pas pour ce qui peut être ; aussi n'est-il pas nécessaire que l'hypothèse soit véritable , mais il suffit qu'elle soit possible. C'est pourquoi on peut faire plusieurs hypothèses différentes sur un même sujet.





ELEMENTS D'ARITHMETIQUE.

DEFINITION PREMIERE.

- I.  L'ARITHMETIQUE est la Science des nombres , ou l'Art de compter ; c'est-à-dire , l'art de trouver certains nombres tirés de quelques-uns déjà posés & connus , avec lesquels ils ont un certain rapport. S'il faut , par exemple , trouver un nombre égal à deux fois 6 & 8 joints ensemble.

Remarque.

2. On entend par le mot de *Science* la Méthode de raisonner conséquemment sur des principes certains , clairs & bien fondés.

DEFINITION II.

3. Plusieurs unités de même espèce assemblées font ce que nous appellons un *Nombre*. Si , par

exemple , à un louis on ajoute un autre louis ; on aura deux louis ; si à ces deux on en ajoute encore un , on en aura trois ; ainsi 2 , 3 , 4 , &c. sont des Nombres.

Corollaire I.

4. Tout nombre suppose donc plusieurs unités ; & l'on ne sçauroit faire la comparaison d'aucun nombre , s'il n'est composé d'unités de même espèce. Ainsi quand je dis 6 , toutes les unités qui composent ce nombre , sont censées de même genre ou de même espèce , comme 6 chiens , 6 pommes , 4 maisons , 5 chapeaux , &c.

Corollaire II.

5. On appelle *nombre de même espèce* ceux qui sont composés de mêmes unités. Un nombre devient plus grand , quand on lui ajoute des unités ou des nombres de même espèce : il diminue lorsqu'on lui en ôte. Les nombres ne souffrent point d'autres changemens.

Corollaire III.

6. On ne peut augmenter un nombre que de deux manières ; ou en lui en ajoutant de semblables à lui-même , ou plus grands ou plus petits que lui : comme si à 4 j'ajoute une fois , 2 fois , 3 fois 4 , &c. ces nombres seront des nombres semblables à celui auquel je les ai ajouté. Si j'ajoute 6 à 4 , ou 3 à 4 , le premier est plus grand , le second plus petit que lui.

Corollaire IV.

7. Il est évident par la même raison , qu'on ne

D'ARITHMETIQUE. 3

peut diminuer un nombre que de deux manieres , en en retranchant une ou plusieurs fois un nombre moindre que lui , comme si de 12 je retranche une ou plusieurs fois 3 ; ou en lui ôtant tels autres nombres qu'on voudra , pourvû qu'ils soient plus petits que lui , comme 5 , 4 , 7 , &c.

Remarque.

8. Il n'y a donc que quatre regles par le moyen desquelles on puisse faire une supputation exacte : l'*Addition* , qui se fait en ajoutant deux ou plusieurs nombres ensemble , ou une unité à une autre unité : la *Multiplication* en ajoutant le même nombre plusieurs fois : la *Soustraction* en retranchant un ou plusieurs nombres d'un autre proposé , & la *Division* , lorsqu'on soustrait plusieurs fois le même nombre.

DEFINITION III.

9. *Ajouter* , c'est trouver un nombre dont la valeur soit égale à celle de plusieurs nombres de même espece joints ensemble. Ce nombre trouvé s'appelle *somme* ; & ceux dont on a composé la somme , se nomment *sommandes* , ou *nombres à réduire en somme*.

Corollaire.

10. Tout nombre étant composé d'unités (§. 3.) l'*Addition* se fera en ajoutant successivement les unités des autres nombres à un nombre déjà posé.

Remarque.

11. Lorsqu'on veut apprendre à faire l'*Addition* , il faut d'abord compter les unités des nombres par les doigts , & répéter cette maniere de

compter jufques à ce qu'on fe foit bien mis dans la tête combien fait un petit nombre joint à un nombre plus grand ou plus petit : par exemple , 2 & 3 font 5 ; 3 & 4 font 7 ; 8 & 6 font 14 , &c.

DEFINITION IV.

12. *Soustraire*, c'est retrancher un petit nombre d'un plus grand de même efpece , comme fi de 9 je retranche 5 , il reſte 4. Ce reſte ſe nomme *Reſte* , *Excès* ou *Différence* , parce que la différence des deux nombres inégaux n'eſt autre choſe que ce qui reſte après l'opération. Ainſi ſouſtraire , c'eſt trouver un nombre qui joint avec un nombre donné de même efpece , ſoit égal à un autre propoſé : comme ſi de 9 on retranche 5 , reſte 4 ; ces cinq unités jointes avec les quatre qui reſtent après la Souſtraction , font le nombre de 9 qu'on avoit propoſé.

Corollaire.

13. Tout nombre étant donc compoſé d'unité , la Souſtraction ſe fait , ſi des unités d'un nombre propoſé on ôte ſucceſſivement les unités de l'autre nombre donné.

Remarque.

14. On ſuppoſe que celui qui veut faire la Souſtraction , ſçait ôter d'un nombre les unités qu'il a ſçu y ajouter. (§. 11.)

DEFINITION V.

15. *Multiplier* , c'eſt de deux nombres donnés en trouver un troiſième qui renferme un des deux propoſés autant de fois qu'il y a d'unités dans l'au-

D'ARITHMETIQUE. 5

tre , ce qui se fait en répétant un nombre autant de fois que celui qui le multiplie renferme d'unités. Lorsque , par exemple on multiplie 3 par 4 , on prend 3 autant de fois qu'il y a d'unités dans 4 ; c'est-à-dire 4 fois. Le nombre qu'on veut multiplier se nomme *Multiplie* , & celui par lequel on le multiplie se nomme *Multiplie*. Ce qui résulte de la Multiplication , comme 12 de 3 multiplié par 4 , 12 se nomme *Produit*.

Corollaire.

16. La Multiplication n'est donc qu'une addition réitérée d'un même nombre (§. 9.) autant de fois que le Multiplie contient d'unités.

D E F I N I T I O N V I .

17. *Diviser* , c'est chercher un nombre qui m'indique combien de fois un tel nombre est contenu dans tel autre donné. Si je cherche par exemple , combien de fois 3 est renfermé dans 15 , je trouve 5 fois ; ce nombre 5 que je cherchois se nomme *Quotient* ou *Exposant*. Le premier des deux autres nombres 3 & 15 ; s'appelle *Diviseur* , le second 15 , se nomme *Dividende*.

Corollaire I.

18. Diviser n'est donc autre chose que soustraire plusieurs fois un même nombre d'un autre plus grand de même espèce. (§. 12.)

Corollaire II.

19. Le nombre qu'on nomme *Diviseur* est donc renfermé autant de fois dans celui qu'on appelle *Dividende* , qu'il y a d'unités dans le Quotient.

Axiome I.

20. Chaque nombre, ou quantité, est égal à lui-même, comme un tout est égal à ses parties prises ensemble.

Remarque.

21. Cet axiome est fort utile, parce qu'on peut considérer chaque nombre comme composé de plusieurs autres réunis ou divisés. Par exemple, le nombre 6 peut venir de 4 & 2 réunis, de 3 multiplié par 2; de 8, en retranchant 2; & de 12 divisé par 2. On voit donc que toutes ces manières de compter donnent toujours le nombre 6.

Axiome II.

22. Deux nombres, quantités, ou telles autres choses que ce puisse être, égales à une troisième, sont égales entre elles.

Remarque.

23. Pierre, par exemple, a deux chapeaux de même grandeur, même matière, & même couleur que celui de Paul: les trois chapeaux sont donc égaux, & par conséquent les deux chapeaux de Pierre sont égaux entre eux.

Axiome III.

24. Si à des choses égales on ajoute choses égales, les sommes seront égales. Si à une chose plus grande, ou à une plus petite, on ajoute choses égales, la plus grande somme demeurera plus grande, & la plus petite restera plus petite; & si à des

D' ARITHMETIQUE. 7

choses inégales on ajoute des choses égales , elles resteront inégales.

Axiome IV.

25. Il en est de la Soustraction comme de l'addition; si des choses égales on rétranche choses égales, les restes seront égaux. Si, par exemple, de deux bourses où il y a 20 louis, on en ôte dix de chacune, il en restera 10 dans chacune.

Axiome V.

26. Si on multiplie choses égales par choses égales, les produits seront égaux. Si vous multipliez choses inégales par choses égales, les produits seront inégaux.

Axiome VI.

27. Si vous divisez choses égales par choses égales, les quotients seront égaux. Si on divise des grandeurs inégales par des grandeurs égales, les grandeurs divisées demeureront inégales.

Corollaire.

28. Si deux personnes font le même calcul sans erreur, ils doivent trouver nécessairement la même chose. S'ils ne rencontrent pas de la même façon, il y a erreur dans le calcul de l'un des deux.

Axiome VII.

29. Un bâton de cinq pieds étant plus long qu'un bâton qui n'en a que 4, est par conséquent plus long que tous ceux qui n'en ont que 4.

Axiome VIII.

30. Un tout est égal à toutes ses parties prises

A iiij

ensemble, & plus grand que chacune en particulier.

Hypothèse I.

31. En nombrant, on doit calculer par dixaines successivement d'un rang de chiffres à l'autre, exceptés les deniers qui se nombrant par 12.

Remarque.

32. Cette maniere de compter par dixaines est généralement reçue de tout le monde; elle est devenue comme une loi naturelle à tous les hommes, parce qu'ils s'y sont habitués dès la plus tendre jeunesse. La raison de cela, c'est, sans doute, qu'ils s'accoutument de compter par les doigts, quand ils ne savent pas encore la science du calcul. (§. 11.)

Corollaire.

33. Pour éviter la confusion & l'embarras, il a fallu donner un nom propre à chaque nombre de la première dixaine, & en assigner aussi de particuliers pour exprimer les dixaines entières qui viennent ensuite. Ainsi un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, sont les noms donnés aux nombres de la première dixaine; & vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, &c. sont les noms de la seconde, troisième, quatrième, cinquième, sixième dixaine.

Hypothèse II.

34. De même que dix fois dix se nomment cent, dix fois cent se nomment mille; mille fois mille se nomment un million, &c. Quand on pousse le calcul plus loin, on employe les noms de milliars, billions, trillions, quatrillions, quintillions, &c.

Remarque.

35. On se sert de ces dénominations pour éviter l'obscurité & la confusion qui naîtroient infailliblement dans un calcul si étendu, & pour donner une idée claire & distincte de la valeur ou quantité que ces nombres expriment.

Hypothèse III.

36. On exprime les neuf nombres, desquels sont composés tous les autres, par les caractères suivans 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, auxquels on a aussi donné le nom de *Chiffres*. Pour exprimer les dizaines, centaines, mille, &c. on est convenu d'attribuer à ces caractères une valeur qu'on peut appeler *valeur locale*, parce qu'elle dépend de l'ordre qu'on leur donne; de sorte qu'un caractère placé seul à la droite de celui qui fait le calcul, ne se prend que pour de simples unités: s'il est suivi d'un second à gauche, ce second exprime les dizaines, le troisième des centaines, le quatrième des mille, &c. On est aussi convenu que cette figure (0) seroit une marque de nullité, & qu'elle rempliroit le vuide qui se trouve d'un nombre à un autre, quand ils ne se suivroient pas selon l'ordre naturel qu'on a établi entre eux. Ainsi pour marquer quatre cent soixante-huit, il faut écrire 468, & pour marquer quatre cent six, on écrira 406, où le zero occupe la place des nombres 1, 2, 3, 4, 5, qui sont exprimés par le seul caractère 6, & marque en même tems que depuis quatre cent jusqu'au nombre six, il n'y a point de dizaine.

Problème I.

37. Enoncer un certain nombre de chiffres pro-

posés, c'est-à-dire, assigner à chaque caractère la valeur qui lui est propre.

Solution.

1°. Il faut diviser en différentes tranches les chiffres proposés, trois par trois dans chacune, en commençant à droite sans déranger l'ordre qu'on leur a donné; si à la fin des divisions il ne s'en trouvoit pas trois pour mettre dans la dernière tranche à gauche, il n'y faut mettre que ceux qui s'y trouveront.

2°. Le premier chiffre à droite de la troisième division doit être marqué d'un point. (.) Le premier de la cinquième sera marqué de deux, & le premier de la septième de trois, &c.

3°. C'est-à-dire qu'on marquera les millions par un point, les billions par deux, &c. Le premier chiffre qui est à droite dans chaque division, doit s'énoncer par unités, le second par dizaines, le troisième par centaines. Si, par exemple, on me proposoit d'énoncer la valeur de chacun des chiffres qui suivent selon l'ordre qu'ils ont.

2125473613578432597 écus:

Je les partagerois ainsi

200, 125, 47300, 613, 5780, 432, 597 écus, & puis les prenant à gauche selon leur valeur, je dirois, deux trillions, cent vingt-cinq mille quatre cent soixante-treize billions, six cent treize mille cinq cent soixante-dix-huit millions, quatre cent trente-deux mille cinq cent quatre-vingt dix-sept écus.

Démonstration.

La démonstration est évidente par les hypothèses établies cy-devant. (§. 31, 34, 36.)

D'ARITHMETIQUE. 111

Problème II.

38. Ajouter plusieurs nombres proposés.

Solution en forme de Règle.

1°. Rangez tous les nombres proposés de façon que les unités soient sous les unités, les dizaines sous les dizaines, les centaines sous les centaines, &c.

2°. Tirez une ligne droite sous ces nombres ; afin d'éviter la confusion.

3°. Commencez à faire l'addition des unités : si dans la somme de ces unités il y a des dizaines, & quelques nombres de plus, écrivez dessous les unités ce qui reste après les dizaines, que vous ajouterez à celles de la colonne voisine, en les additionnant comme les unités. Si dans la somme qui en provient il se trouve quelques centaines, il faut les réserver pour les additionner avec les centaines, & écrire le surplus au dessous des dizaines. La même règle doit se garder pour les centaines, &c.

Soit proposé l'exemple suivant.

45538	Fantassins.
3352	Carabiniers.
6341	Cavaliers.
867	Dragons.
95	Officiers Généraux.
56193.	

Commencez par la première colonne à droite ; & dites 5 & 7 font 12 & 1 font 13 & 2 font 15 & 8 font 23, laquelle somme de 23 contient deux dizaines & trois unités : écrivez donc 3 sous la ligne des unités, & retenez deux dizaines, que vous joindrez à la colonne des dizaines qui suit ;

& dites, 9 & 6 font 15 & 4 font 19 & 5 font 24 & 3 font 27 & 2 que vous avez retenu des unités font 29 : c'est-à-dire, 29 dizaines; vous poserez donc 9 sous la colonne des dizaines, & vous retiendrez 2 centaines que vous ajouterez à la colonne des centaines, en disant 8 & 3 font 11 & 3 font 14, & 5 font 19 & 2 que j'ai retenu font 21 : j'écris donc 1 sous les centaines, & je retiens 2 mille, que je transporte à la colonne des mille, & je dis, 6 & 3 font 9 & 5 font 14 & 2 que j'ai retenu font 16; j'écris donc 6 au dessous de la colonne des mille, & je retiens une dizaine de mille que je compte avec la colonne suivante, & je dis, 4 & 1 que j'ai retenu font 5 que je marque au dessous de la colonne que je viens d'additionner. Tous lesquels nombres réunis font la somme de 56193 hommes.

Demonstration.

Il est évident par l'opération que le nombre trouvé contient toutes les unités, toutes les dizaines, toutes les centaines, &c. c'est-à-dire, toutes les parties des nombres qu'on avoit proposé. Donc il est égal à tous ces nombres pris ensemble, (5. 30.) & en est en même tems la somme. Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque première.

39. On doit faire attention que si l'on prend pour des unités toutes les parties des nombres proposés, il arrive qu'on ne retient que celles qui excèdent 9 : car au lieu de marquer 15 au dessous de la colonne, on se contente de marquer 5 & de retenir 1; c'est-à-dire, une dizaine, lesquels deux nombres 1 & 5 considérés simplement comme uni-

D'ARITHMETIQUE. 13

rés , ne font que 6 , qui est l'excédant de 9. De même au lieu d'écrire 16 au dessous de la colonne , on marque 6 seulement , & on retient 1 , qui pris pour des unités ne font que 7 , nombre excédant celui de 9 dans le nombre de 16.

Il est donc clair qu'on ne marque au dessous des colonnes , que les nombres qui font plus petits ou plus grands que 9 , ou qui font précisément ce nombre , & qu'on transporte à la colonne suivante toutes les dizaines de la somme.

Il faut aussi observer , que si la somme des rangs exprime un nombre juste de dizaines , on doit poser le (0) au dessous de la colonne , & retenir le nombre des dizaines pour l'ajouter au rang suivant qui est vers la gauche ; par exemple.

$$\begin{array}{r} 435. \\ 342. \\ 523. \\ \hline 1300. \text{ somme.} \\ \hline 110. \text{ preuve.} \end{array}$$

Je dirai donc 3 & 2 font 5 & 5 font 10 : je pose sous la colonne des unités (0) & je retiens (1) qui ajouté à 2 font 3 & 4 font 7 & 3 font dix ; je pose (0) & je retiens (1) que je joins à la colonne suivante , 5 & 1 que j'ai retenu font 6 & 3 font 9 & 4 font 13 : je pose 3 & retiens 1 que je mets devant 3 , parce qu'il n'y a plus de colonne à laquelle je puisse l'ajouter.

Remarque seconde.

40. Le meilleur moyen pour sçavoir si l'on ne s'est point trompé dans l'opération , c'est de refaire l'addition de bas en haut , si on l'a commencée de

haut en bas. On peut faire ce qu'on nomme la *Preuve* d'une autre maniere ; quoique celle-ci soit la plus simple & la moins embarrassante , je mettrai encore la suivante.

Toutes les parties de l'Arithmétique se prouvent par leur contraire , & par conséquent l'addition par la soustraction ; cette preuve tire son infallibilité de ce principe ; *si d'un tout on ôte toutes les parties il ne doit rien rester* : c'est-à-dire , que le reste doit être (0.)

Ainsi pour connoître si l'addition précédente est bien faite ; c'est-à-dire , si le nombre trouvé 1300 est la véritable somme de tous ceux qui sont au-dessus , on les ôtera de cette somme , en commençant par la premiere colonne à gauche , & disant 4 & 3 font 7 & 5 font 12 , qui retranchés du nombre 13 , qui est au dessous, reste 1 , qu'on écrira sous le nombre 13 , comme on le voit dans l'exemple cy-dessus. Ce reste 1 représentant la dixaine qui a été retenue dans l'addition , fait par conséquent avec le zéro suivant le nombre de 10. Je passe à la seconde colonne & j'ajoute tous les nombres , en disant , 3 & 4 font 7 & 2 font 9 , qui ôté de 10 , il reste 1 que j'écris au dessous de (0.) Je repète la même opération dans les colonnes suivantes vers la droite jusqu'à la dernière , où il reste (0) qui fait connoître que l'addition a été bien faite , puisqu'il est compté pour rien.

Remarque troisième.

41. Les Mathématiciens se servent ordinairement de ce signe + pour marquer l'addition de deux choses ensemble. Ce signe veut dire *Plus*. Quand ils veulent donc faire entendre qu'un nom-

bre est ajouté à l'autre, comme 7 à 3, ils l'expriment ainsi ($3+7$.)

Remarque quatrième.

42. Quand les nombres n'ont point de dénomination particulière, on les appelle *nombres simples & incomplexes* : mais lorsqu'ils marquent quelques grandeurs déterminées qui peuvent se diviser en plusieurs parties ou sous espèces plus petites, on nomme ces quantités, *nombres complexes*. La livre de monnoye, par exemple, se divise en 20 parties qu'on appelle *sols*, le sol en 12 parties qu'on appelle *deniers*. Ces nombres sont dits complexes, parce qu'ils ont une dénomination particulière, dix sols, dix deniers, dix livres ; ces nombres prennent une détermination arbitraire, parce que d'eux-même, ils ne signifient pas plutôt la quantité d'une chose que d'une autre. Le nombre 15, par exemple, ne signifie pas plutôt 15 sols que 15 deniers.

La même chose arrive quand il s'agit d'autres grandeurs composées de sous-espèces plus petites, comme la toise divisée en 6 pieds, le pied en 12 pouces, le pouce en 12 lignes, &c. Quand il s'agit de faire des additions de cette nature, on doit commencer par la plus basse espèce ; c'est-à-dire, par les deniers dans le premier exemple, & par les lignes dans le second. Lorsque l'on trouve assez de deniers pour faire le sol, on le retient pour la colonne des sols ; s'il s'en trouve plus ou moins, on pose ce plus ou moins sous la colonne des deniers, & l'on transporte les sols comme j'ai dit cy-dessus. On opère de la même manière, pour les toises, pouces, lignes, &c., par exemple.

25	livres	14	fol.	6	deniers.
33		12		9.	
64		18		11.	
124	liv.	6	f.	2	den.

Je dis, 26 deniers font 2 sols & deux deniers : je pose donc 2 deniers sous la colonne des deniers, & transportant les 2 sols à la colonne des sols, je dis, 8 & 2 font 10, & 4 font 14, & 2 que j'ai retenu font 16 : je pose 6 sous la colonne des sols, & je retiens une dizaine ; je passe à la colonne des dizaines, & je dis, 1 & 1 font 2, & 1 fait 3, & une retenue fait 4 ; & parceque quatre dizaines de sols font justement 2 liv. je ne pose rien, mais je transporte ces deux livres à la colonne des livres, en disant, 4 & 3 font 7 & 5 font 12, & 2 que j'ai retenu font 14, je pose donc sous la colonne des livres l'excédant de dix, & j'ajoute ainsi à la colonne suivante cette dizaine que je retiens, & je continue, 6 & 3 font 9 & 2 font 11, & 1 que j'ai retenu fait 12 que je pose, parce qu'il ne se trouve plus de colonne où je puisse transporter.

Problème III.

43. Soustraire un petit nombre d'un plus grand.

Solution.

1°. Il faut écrire le plus petit nombre sous le plus grand, avec la précaution de mettre les unités sous les unités (§. 38.)

2°. On tirera une ligne sous ces chiffres.

3°. Ensuite on ôte les unités des unités, les dizaines des dizaines, les centaines des centaines, &c. On écrira les restes sous la ligne qu'on a tiré
so

D'ARITHMETIQUE. 17

sous les chiffres , de maniere que les restes des unités soient sous les unités , &c.

Si, par exemple, de cinq mille six cent soixante-quatre livres, je veux soustraire trois mille quatre-cent cinquante-trois livres, j'opererai de la maniere qui suit.

$$\begin{array}{r} 5664 \\ 3453 \\ \hline 2211 \end{array}$$

De 4 ôtez 3 , reste 1 que je mets sous les unités ; je passe aux dixaines ; de 6 ôtez 5 , reste 1 que je pose sous les dixaines , ainsi de suite.

4°. S'il arrivoit que le chiffre qu'on veut ôter fût plus grand que celui duquel on veut le soustraire , comme 6 de 4 , il faut emprunter du chiffre voisin à gauche une unité qui vaudra une dizaine (§. 36.) qui jointe à 4 fera 14 , d'où on pourra facilement ôter 6. Soit donné, par exemple , quatre mille cinq cent quarante-deux écus dans une bourse, j'en ôte deux mille trois cent cinquante-un ; combien en restera-t-il ?

$$\begin{array}{r} 4542 \\ 2351 \\ \hline 2191 \end{array}$$

Je dis, 1 ôté de 2 reste 1 , que j'écris dessous la ligne ; je continue au chiffre suivant : 5 ôtés de 4 , cela ne se peut , j'emprunte une dizaine du chiffre précédent à gauche , je joins cette dizaine à 4 qui pour lors vaut 14 , dont ôtant cinq , reste 9 que je pose dessous la ligne : je passe au chiffre suivant 5 , duquel ayant emprunté 1 , il ne vaut plus que 4 : je dis donc , 3 ôtés de 4 reste 1 , que j'écris dessous , & ainsi de suite.

Tome I.

B

5°. On trouve quelquefois des zeros; il faut dans ce cas emprunter une dizaine du premier chiffre positif à gauche, & opérer comme dans l'exemple suivant.

$$\begin{array}{r} 45030 \\ 32621 \\ \hline 12409 \end{array}$$

De 0 ôtez 1, cela ne se peut, j'emprunte donc du 3 une unité qui vaut 10 : (§. 36.) si de 10 j'ôte 1, reste 9 : ensuite de 2 ôtez 2, il ne reste rien, je mets donc 0 qui exprime une nullité : (§. 36.) & comme le chiffre suivant se trouve un 0, j'opère comme au premier, en empruntant du chiffre voisin à gauche.

Quand on en trouve plusieurs de suite, on n'emprunte pas du chiffre positif autant d'unités qu'il y a de zeros; on se contente d'en prendre une, mais tous les zeros, excepté le premier à droite, ne valent que 9.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} 30002 \\ 12851 \\ \hline 17151 \end{array}$$

.. 30002 *preuve.*

Démonstration.

Par l'opération on voit que le nombre trouvé contient le reste de toutes les unités, de toutes les dizaines, &c. Or, comme le reste de toutes les parties ensemble est égal au reste total, si l'on ajoute ce reste au nombre qu'on a soustrait, ces deux nombres joints ensemble feront le nombre donné.

Remarque I.

44. Pour ſçavoir ſi l'opération eſt juſte , il faut ajouter le nombre trouvé à celui qu'on a ôté de l'autre.

Remarque II.

45. Le ſigne dont on eſt convenu pour marquer la Souſtraction eſt — & ſ'exprime par *moins* : ainſi pour marquer la différence de 8 & 5 , on écrit de cette manière , $8 - 5$; c'eſt-à-dire , $3 = 8 - 5$.

Remarque III.

46. La Souſtraction compoſée diffère de la ſimple , en ce que la valeur des unités , qu'on emprunte des eſpèces plus grandes , n'eſt pas déterminée à 10 , mais que cette unité empruntée a la même valeur qu'une unité de l'eſpèce plus grande qui la précède à gauche.

Soit pour exemple ,

Si de . . .	545 ^{liv.}	8 ^{ſ.}	8 ^{den.}
On retranche	323	9	9
Reſte	221	18	11

Pour réuſſir il ſuffit de ſçavoir le rapport des parties dont chaque eſpèce eſt compoſée , & ſe ſouvenir qu'il faut toujours avoir recours à la plus grande eſpèce qui précède immédiatement , comme dans l'exemple cy-deſſus , ne pouvant ôter 9 deniers de 8 , j'ai emprunté un ſol ſur 8 , qui par conſéquent ne vaut plus que 7 , duquel ne pouvant retrancher 9 , j'ai emprunté une livre du rang des livres , &c. La preuve de la Souſtraction compoſée ſe fait par l'addition comme celle de la Souſtraction ſimple.

B ij

Problème I V.

47. Faire ce que l'on nomme le *quarré de Pythagore*, du nom de celui qu'on croit en être l'inventeur.

Solution.

On appelle communément ce quarré le *Livret*, c'est-à-dire, une table où les produits des 9 premiers chiffres multipliés par eux-mêmes, sont marqués.

1°. Faites un quarré dont vous partagerez chaque côté en 9 parties égales, & par chaque point de division vous tirerez des lignes paralleles à chacun des côtés, qui diviseront le grand quarré en plusieurs autres petits quarrés.

2°. On écrira dans chaque petit quarré de la premiere tranche horifontale du haut, les 9 premiers chiffres, en suivant leur ordre naturel; ce qu'on fera aussi dans les petits quarrés de la premiere tranche perpendiculaire à gauche.

3°. On ajoutera 2 à 2 qui font 4, & l'on placera ce 4 sous le 2 de la tranche horifontale, à la suite du 2 de la tranche perpendiculaire. A ce 4, si l'on ajoute 2, on aura 6 qu'on placera de suite, &c.

4°. En suivant la même méthode, on placera les autres chiffres dans les quarrés où ils doivent être, comme dans la troisième tranche, 3 ajoutés à 3, on aura 6, qu'on mettra à la suite de 3, sous le 4 de la seconde tranche horifontale, & les autres ainsi de suite.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Remarque.

48. Il faut ſçavoir cette table par cœur, où l'avoir devant les yeux quand on doit faire une multiplication ou une division ; car lorsqu'on n'y eſt pas bien exercé, ces opérations en deviennent plus longues & plus difficiles.

Problème V.

49. Multiplier un nombre donné par un autre.

Solution en forme de Règle.

1°. Il faut écrire le nombre qui doit ſervir de Multiplicateur ſous celui qu'on veut multiplier, comme l'on fait dans l'addition (§. 38.) c'eſt ordinairement le plus petit ſous le plus grand.

2°. Tirez une ligne droite ſous les deux nombres.

3°. Avec le ſecours du Livret cy-deſſus, multipliez tous les chiffres du Multiplicande par chaque chiffre du Multiplicateur, obſervant toutefois de retenir les dixaines de chaque produit, pour les

B ij

ajouter au produit du chiffre voisin à gauche, & de reculer d'un rang vers la gauche le reste de chaque chiffre du Multiplicateur, afin que les dixaines se trouvent sous les dixaines, les centaines sous les centaines, &c.

4°. Ensuite on ajoutera tous ces produits particuliers (§. 38.) & leur somme fera le produit cherché.

Si, par exemple, on donne à multiplier

$$\begin{array}{r}
 \phantom{\text{par}} \quad 38476 \\
 \text{par} \quad \underline{ 35} \\
 \hline
 192380 \quad \text{Premier Produit.} \\
 115428 \quad \text{Second Produit.} \\
 \hline
 1346660 \quad \text{Produit cherché.}
 \end{array}$$

Vous direz, 5 fois 6 font 30, mettez 0 & retenez 3; dites ensuite, 5 fois 7 font 35 & 3 que j'ai retenu font 38: posez 8 en droite ligne à la gauche de 0 & retenez 3: puis, 5 fois 4 font 20 & 3 retenus font 23; mettez 3 devant 8; continuez ainsi jusqu'au dernier chiffre, & vous aurez le premier produit. Vous passerez au second chiffre 3 du Multiplicateur, en disant, 3 fois 6 font 18, vous poserez 8, mais en le reculant sous la colonne des dixaines, parce que le Multiplicateur 3 est au rang des dixaines; continuez à multiplier tous les autres chiffres du Multiplicande par ce 3 Multiplicateur, & la somme des deux produits vous donnera celui que vous cherchez.

Démonstration.

On voit par cette opération que le premier produit contient autant de fois le Multiplicande, que le premier chiffre du Multiplicateur renferme d'uni-

tés : & comme le second produit est reculé d'un rang vers la gauche, on doit raisonner du second chiffre Multiplicateur, comme on a raisonné du premier ; le nombre de dessus a donc été multiplié par celui de dessous. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

50. Si dans les nombres donnés il se trouve des zéros comme dans ces exemples,

par	$\begin{array}{r} 458 \text{ à multiplier} \\ 150 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 4860 \\ 200 \\ \hline 972000 \end{array}$
	$\begin{array}{r} 2290 \\ 458 \\ \hline 68700 \end{array}$	

On multipliera les chiffres positifs les uns par les autres, & l'on ajoutera tous les zéros du Multiplicande & du Multiplicateur à la fin du produit.

Ce signe $\times$ marque que deux chiffres sont multipliés l'un par l'autre ; ainsi 4×5 , signifie que 4 est multiplié par 5 ; mais pour indiquer simplement une multiplication à faire, on se sert quelquefois d'un point seul, comme (3 . 4.) ce qui désigne le produit de 3 multiplié par 4. Cet autre signe $=$ marque l'égalité qui se trouve entre deux quantités ; ainsi $4 + 5 = 9$, veut dire que 4 plus 5 est égal à 9.

La preuve de la Multiplication se fait par la division (§. 51.) car si l'on divise le produit total par un des deux nombres donnés, l'autre nombre naîtra de cette division. (§. 15. 17.)

Problème VI.

51. Diviser un nombre donné par un autre.

B iij

I. C A S. Si le Diviseur n'a qu'un seul caractère.

1°. On placera le diviseur à gauche sur le premier caractère du dividende. Si le caractère est moindre que celui du Diviseur, on placera ce dernier sur le suivant du Dividende. Faites ensuite un petit arc à côté pour placer le *Quotient* ; puis on cherchera combien de fois le Diviseur est contenu dans le premier chiffre du Dividende, si celui-ci est plus grand ; ou dans les deux premiers, si le diviseur a été placé sur le second ; & l'on marquera ce nombre de fois au quotient.

2°. On multipliera ce Quotient par le Diviseur, & on ôtera le produit du, ou des chiffres divisés du Dividende ; & s'il y a quelque reste, on l'écrira au-dessous.

3°. On abaissera à la droite de ce reste le caractère suivant du Dividende, & l'on cherchera de nouveau combien de fois le Diviseur y est contenu, & on l'écrira à la suite du chiffre du Quotient. Si dans la première Division il ne s'étoit point trouvé de reste, il suffiroit pour la seconde d'avancer le Diviseur sur le caractère suivant du Dividende, & puis on opere comme devant. Si l'on continue cette méthode pour tous les chiffres du Dividende, on aura le Quotient.

Soit donné pour exemple, le nombre 7854 à diviser par 3.

$$\begin{array}{r} \text{Diviseur} \quad 3 \quad 3 \\ \text{Dividende} \quad 7854 \quad (2618. \text{ Quotient.} \\ \quad \quad \quad 18 \end{array}$$

24

Dites, 3 est contenu 2 fois dans 7, je mets 2 au Quotient ; je multiplie ensuite 2 par 3, & j'ai 6, qui ôtés de 7, il reste 1 qu'on met au-dessous

du Dividende : j'abaisse le second caractère du Dividende 8 à la droite du reste 1 , ce qui fait 18 : je cherche de nouveau combien de fois 3 est contenu dans 18 , je trouve 6 , je pose donc 6 au Quotient à la suite de 2 : je multiplie 6 par trois , le produit est 18 , qui ôtés de 18 , il ne reste rien. J'avance donc le Diviseur sur le troisième caractère du Dividende 5 , & je dis , en 5 combien de fois 3 , je trouve 1 fois , je pose 1 au Quotient , & après avoir multiplié 1 par 3 , le produit est 3 , qui soustrait de 5 il reste 2 , que je place au dessous de 5 , & à côté duquel j'abaisse le caractère suivant du Dividende , ce qui fait 24 , dans lequel nombre 3 est contenu 8 fois ; je mets donc 8 au Quotient , & après avoir multiplié 8 par 3 , le produit est 24 , qui retranché de 24 , il ne reste rien : & comme il n'y a plus de chiffre à diviser , tout le Quotient est trouvé.

Démonstration.

On cherche dans cette opération combien de fois le Diviseur est contenu dans les mille , les centaines , & les dizaines , &c. Il est évident que le tout étant égal à toutes ses parties prises ensemble , le Quotient marquera cette quantité de fois (§ 30.)

II. C A S. Si le Diviseur est composé de plusieurs chiffres ou caractères.

1°. On placera le premier chiffre du Diviseur sur le premier du Dividende à gauche , & les autres de suite sur ceux du Dividende vers la droite ; on fera ensuite un petit arc ou une ligne perpendiculaire. pour séparer le Dividende du Quotient.

2°. On cherchera combien de fois le premier chiffre à gauche du diviseur est contenu dans le premier du dividende , & on posera cette quantité de fois au quotient. (§. 47.)

3°. On multipliera ce Quotient par tous les chiffres du Diviseur, puis on examinera si l'on peut soustraire le produit des chiffres du Dividende placés au-dessous.

4°. Si la Soustraction peut se faire, on écrira le reste au-dessous, s'il y en a, après avoir mis le nombre au Quotient, & l'on effacera par une ligne transversale les chiffres dont on a fait la Division, afin de ne pas la faire deux fois. Si la Soustraction ne peut se faire, on diminuera le Quotient d'une ou de plusieurs unités, jusqu'à ce que le produit du Quotient par le Diviseur puisse être soustrait des chiffres qu'on a pris pour être le Dividende.

5°. On avancera le Diviseur d'une place vers la droite, ou on abaissera le caractère à diviser du Dividende à côté du reste de la Soustraction, s'il y en a, & ensuite on procédera comme devant, jusqu'à ce que le Diviseur soit au bout du Dividende.

6°. Si vous voulez faire la preuve de votre opération, multipliez tout le Quotient par le diviseur, & ajoutez au produit ce qui pourroit être de reste : de cette façon le produit sera égal au Dividende, si l'opération est bien faite. Soit pour exemple, 7856 à diviser par 32.

<i>Diviseur</i> 32	<i>Preuve</i> 245
<i>Dividende</i> 7856 (245	32
64	490
145	735
128	7840
176	<i>Reste</i> 16
160	<i>Produit total égal au</i>
<i>Reste</i> 16	<i>Dividende.</i>
	7856

D' ARITHMETIQUE. 27

Après avoir donc écrit 32 sur 78, dites : en 7 combien de fois 3, je trouve 2; multipliez 2 par 32, ce qui fait 64, & comme 64 peuvent être soustraits de 78, marquez 2 au Quotient, & l'excès au dessous de 78, abaissez 5 à la droite de 14 qui étoient restés, & dites, en 14 combien de fois 3? on trouve 4 fois, multipliez donc 4 par 32, le produit est 128, qui pouvant être retranchés de 145, je pose 4 au Quotient, & je mets 17, qui étoient de reste, au dessous de 145; j'abaisse ensuite 6 devant 17, ce qui donne 176; je dis donc, en 17 combien de fois 3? je trouve 5; je multiplie 5 par 32, le produit est 160, qui pouvant être ôtés de 176, je mets 5 au Quotient, & il me reste 16 que je place au dessous de 176, & l'opération est finie, parce qu'il n'y a plus de chiffres à diviser.

Remarque I.

Il est à propos de faire attention que pour trouver le Quotient, on partage quelquefois les caracteres du Dividende en plusieurs tranches, & puis on cherche combien de fois le Diviseur est contenu dans chacune; cette méthode revient à l'autre, car il est facile de sçavoir par l'addition, combien de fois le Diviseur est contenu dans le tout, quand on sçait combien de fois il se trouve dans les parties.

Remarque II.

On trouve quelquefois des zéros dans le Dividende, quelquefois aussi dans le Diviseur; un commençant n'étant pas peu embarrassé dans ces cas-là, voici deux exemples qui le mettront au fait. Je veux diviser 56034030 par 30; j'opere donc

ainsi par la méthode précédente. 3 en 5 se trouve 1 fois, 1 multiplié par 30 produit 30, qui soustraits de 56, restent 26, devant lequel j'abaisse 0 ;

30	en 26 je trouve 3 huit
56034030 (1867801	fois; 30 fois 8 donnent
30	240, qui ôtés de 260,
260	restent 20, j'abaisse 3, &c
240	je dis, en 20 combien
203	de fois 3, je trouve 6,
180	qui multipliés par 30
234	font 180, 180 retran-
210	chés de 203, restent
240	23, devant lesquels j'a-
03	baisse 4, & je dis, 3 en
0	23 se trouvent 7 fois,

qui multipliés par 30, donnent 210, je retranche 210 de 234, restent 24, devant lesquels j'abaisse 0, & je dis, 3 en 24 se trouve 8 fois, dont le produit par 30 est 240, qui soustraits de 240, il ne reste rien; j'abaisse donc 3 devant 0, & je dis, 3 se trouve 1 fois dans 3, & 1 multiplié par 30 donne 30, qui soustraits de 30, reste 0, & l'opération est finie.

Toutes les fois que le Diviseur ne se trouve pas dans le Dividende, il faut mettre un zéro au Quotient, pour conserver aux chiffres suivans du Dividende le rang qui leur convient; & après avoir abaissé le caractère suivant devant celui qui ne contenoit pas le Diviseur, on procédera à la division des deux ou trois joints ensemble.

E X E M P L E.

$$\begin{array}{r}
 6 \\
 156024 \overline{) 26004} \\
 \underline{36} \\
 00 \\
 \underline{02} \\
 24 \\
 \underline{24} \\
 0
 \end{array}$$

Je dis donc, en 15 combien de fois 6 ? je l'y trouve 2 fois, j'écris 2 au Quotient, & multipliant le Diviseur 6 par le Quotient 2, ce qui fait 12, j'ôte 12 de 15, il reste 3, que je pose sous le premier caractère du Dividende, afin de pouvoir placer sous le Diviseur le troisième caractère du Dividende 6, que j'abaisse devant 3 qui étoit resté. Au lieu de 156, il ne me reste donc à diviser que 36 ; je dis donc, en 36 combien de fois 6 ? je l'y trouve 6 fois, j'écris donc 6 au Quotient, & après avoir multiplié 6 par 6, qui me donnent 36, je les soustrais des deux caractères du Dividende 36 ; il ne me reste donc rien, c'est pourquoi je tire une ligne sous 36, & j'écris 0 sous le premier chiffre du Dividende, afin que le chiffre 0 du Dividende que je vais abaisser à côté de 0, se trouve sous le Dividende ; après avoir abaissé 0 devant 0, je dis donc, en 00 combien de fois 6 ? trouvant qu'il n'y est point, j'écris un zéro au Quotient, je multiplie le Diviseur 6 par 0, ce qui donne 0, je retranche ce produit 0 des deux 00 du Dividende, & il me reste 0 ; ainsi je tire une ligne sous les deux 00, & je mets 0 sous le premier caractère

du Dividende, pour la raison cy-dessus. J'abaisse ensuite le cinquième caractère 2 à la droite de 0 qui me reste ; je dis donc, en 2 combien de fois 6 ? comme il ne s'y trouve pas seulement une fois, j'écris un 0 au Quotient, je multiplie 6 par 0, ce qui fait 0, & retranchant 0 de 2, il me reste 2 que j'écris encore sous le premier chiffre du Dividende, & j'abaisse le dernier chiffre du Dividende 4 devant 2 ; je dis donc, en 24 combien de fois 6 ? je l'y trouve 4 fois, j'écris 4 au Quotient, & multipliant 6 par 4, je trouve 24, qui soustraits de 24, il ne reste rien, non plus qu'au Dividende. La Division étant donc finie, le Quotient 26004 marque la quantité de fois que 6 est contenu dans 156024.

Il est à propos de pointer ou de barrer les caractères du dividende à mesure qu'on les abaisse, pour marquer qu'on en a fait la Division.

Démonstration.

Elle est presque la même que celle du premier cas, il y a seulement à remarquer que comme on ne peut sçavoir par la table de Pythagore, combien de fois le Diviseur en son entier est contenu dans les chiffres du Dividende, il faut supposer qu'il y est contenu autant de fois que le premier chiffre à gauche du Diviseur est contenu de fois dans le premier, ou les deux premiers à gauche du Dividende. Quoique cette supposition puisse tromper quelquefois, il ne sçauroit pourtant y avoir de l'erreur, parce qu'en faisant la preuve tout de suite par la multiplication du Quotient par le Diviseur, le produit est comparé aux chiffres du Dividende. La preuve trouve sa propre preuve dans les défini-

tions de la Multiplication, (§. 15.) & de la Division. (§. 17.)

Remarque.

Jusqu'ici en suivant la méthode proposée pour l'arrangement des chiffres dans la Division, j'ai toujours mis le Diviseur sur le Dividende, afin d'avoir la commodité de mettre les restes au dessous; mais dans la suite j'ai suivi la méthode de M. Wolf, & j'ai placé le Diviseur au-dessous du Dividende, & les restes au-dessus.

DEFINITION VII.

52. Si l'on compare deux nombres (4 & 12,) de manière qu'on cherche leur différence 8 par la Soustraction, on nomme ce rapport *Raison Arithmétique*; mais si l'on ne fait attention qu'au Quotient 3 trouvé par la Division, on nomme ce rapport *Raison Géométrique*. Le Quotient est donc *l'Exposant de la Raison Géométrique*.

DEFINITION VIII.

53. Lorsque la différence est la même entre deux ou plusieurs rapports arithmétiques, comme (3, 5 & 6, 8.) on dit qu'ils sont semblables, & que les rapports géométriques le sont aussi quand les Exposans sont les mêmes, comme (3, 12 & 5, 20) cette ressemblance de rapports est appelée *proportions*, & les rapports semblables sont nommés *rapports égaux*.

Remarque.

54. On écrit ainsi les nombres qui sont en proportion arithmétique (3. 5 : 6. 8, ou plus communément $3-5=6-8$; on écrit de cette manière ceux qui sont en proportion géométrique (3.

$12 :: 5.20$, ou comme M. Leibnitz $3 : 12 = 5 : 20$. Voici comme on énonce la première ; le premier est au second ce que le troisième est au quatrième, comme si l'on disoit, 3. est à l'égard de 5 ce que 6 est à l'égard de 8, ou bien 5 surpasse 3, comme 8 surpasse 6. Dans le second cas, il faut s'exprimer ainsi, le premier nombre contient ou est contenu autant de fois dans le second, que le troisième contient ou est contenu dans le quatrième ; ou bien 12 contient autant de fois 3, ou 3 est contenu autant de fois dans 12, que 5 l'est dans 20, ou que 20 contient de fois 5. On marque encore fort souvent ainsi la proportion Géométrique $\frac{12}{3} = \frac{20}{5}$, ce qui veut dire que 12 divisé par 3 est égal à 20 divisé par 5, parce que la ligne tirée entre les deux nombres est la marque de la Division.

DEFINITION IX.

55. Quelquefois le second terme de la proportion est le même que le troisième, c'est-à-dire, qu'il exprime une même grandeur, qui pour lors sert de premier conséquent, & de second antécédent ; la proportion est alors nommée *proportion continue*. Quand elle est Arithmétique on l'exprime ainsi ; $\div 3. 6. 9.$ ou $3 - 6 = 6 - 9$. Si la proportion est Géométrique, on écrit $\div 3. 6. 12$, ou $3 : 6 = 6 : 12$.

DEFINITION X.

56. Une suite de nombre qui sont en proportion soit Arithmétique, soit Géométrique, est appelée *Progression*. Ainsi 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27, est une progression Arithmétique, & 3. 6. 12. 24. 48. 96. est une progression Géométrique. On écrit aussi ces progressions de la manière suivante

D'ARITHMETIQUE. 33

suivante, la première $a. b \therefore c. d.$ ou $a, b \therefore c, d.$
la Géométrie, $a. b :: c. d.$ ou $a, b :: c, d.$ ou
encore $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$

Axiome IX.

57. Deux raisons égales à une troisième, sont égales entr'elles, comme $1 : 4 = 3 : 12$; & $1 : 4 = 5 : 20.$ donc $3 : 12 = 5 : 20.$

Théorème I.

58. Si on multiplie les deux nombres 3 & 6 par le même nombre 4; les produits 12 & 24 sont en même raison que les nombres 3 & 6 qui sont multipliés.

Démonstration.

Si je multiplie 4 par 3 & par 6, on trouvera que 6 est contenu autant de fois dans le produit de la multiplication de 4 par 3, que le nombre 3 lui-même est contenu de fois dans 6 (§. 15) ainsi dans cet exemple, 6 étant le double de 3, il s'ensuit que la multiplication de 4 faite par 6 est le double de la multiplication de 4 par 3, & par conséquent il est clair que le produit 12 de 4 par 3, est autant de fois dans le produit 24 de 4 par 6, que le premier nombre 3 est dans 6, & 6 dans 12.

Corollaire.

59. Si l'on divise deux nombres par un même nombre, les quotiens sont en même raison que les nombres donnés à diviser: car pour lors ces derniers peuvent être regardés comme les produits des quotiens multipliés par le diviseur. (§ 15. 17.)

DEFINITION XI.

60. On nomme *Fraction* une quantité divisée en
Tome I. C

parties égales, & dont on en prend une ou plusieurs.

Hypothèse IV.

61. La fraction se marque par deux nombres mis l'un sur l'autre avec une petite ligne entre deux : comme $\frac{2}{3}$; le nombre écrit au dessus de la petite ligne , marque combien on prend de parties de l'entier , & se nomme le *Numérateur* ; celui qui est dessous , indique en combien de parties égales l'entier est partagé , & se nomme le *Dénominateur*.

Corollaire I.

62. Le rapport qu'a le numérateur avec le dénominateur , détermine la grandeur de la fraction ; car plus le numérateur contient de parties du dénominateur , plus la fraction est grande ; ainsi la fraction $\frac{2}{7}$ est plus grande que celle-ci $\frac{1}{17}$ parce que la première contient 2 parties de cinq , au lieu que la seconde n'en contient que 3 de 37 ; mais lorsque un numérateur est contenu autant de fois dans son dénominateur, qu'un autre numérateur dans le sien , les fractions sont égales , comme $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{25}{50}$. Si le numérateur est plus grand que son dénominateur , la fraction est plus grande que l'entier , comme $\frac{35}{24}$; car $\frac{24}{24}$ égale l'entier , & dans le cas de $\frac{35}{24}$ on a 1 1 de surplus.

Corollaire II.

63. Si donc le numérateur & le dénominateur d'une fraction , comme $\frac{4}{6}$ sont multipliés ou divisés par un même nombre , il en naîtra de nouvelles fractions égales entr'elles , parce que le numérateur 4 multiplié par 2 donne 8 , & le dénominateur 6 multiplié par le même nombre 2 donne 12 , d'où il naît deux nouvelles fractions , qui sont en

D' ARITHMETIQUE. 35

même raison ; car ce que 4 est à 6 , 8 l'est à 12. Donc $\frac{4}{12}$ & $\frac{8}{12}$ sont égaux à $\frac{4}{6}$ (§. 58. 59) parce que 8 sont les deux tiers de 12 , comme 2 sont les deux tiers de 3 , & 4 le font de 6.

Problème VII.

64. Réduire ou trouver une fraction , qui quoique exprimée en des termes plus petits qu'une autre donnée $\frac{20}{48}$, lui soit néanmoins égale.

Solution en forme de regle.

Divisez tant le numérateur 20 que le dénominateur 48 de la fraction donnée par le même nombre 4 ; les quotiens 5 & 12 formeront la nouvelle fraction $\frac{5}{12}$, qui sera égale à la proposée ; (§. 63.) car le numérateur & le dénominateur ayant été divisés par le même nombre , les Quotiens doivent être en même raison à leurs dividendes ; & par conséquent quoique $\frac{5}{12}$ soient des termes plus petits que $\frac{20}{48}$, ce sera la même chose de partager l'entier en 48 parties , & en prendre 20 , que de le partager en 12 dont on en prendra 5.

Problème VIII.

65. Réduire plusieurs fractions à la même dénomination , c'est-à-dire , donner le même dénominateur à plusieurs fractions , qui en avoient de différens , de maniere cependant qu'elles se trouvent égales aux fractions proposées.

Solution.

1°. Si l'on propose deux fractions , multipliez chacune dans son entier par le dénominateur de l'autre.

2°. Si l'on en propose plusieurs , multipliez le numérateur & le dénominateur de chacune par le produit des autres. (§. 63.)

Soit pour exemple ,

I. C A s. $\frac{2}{3}$ seront multipliés par 5 , qui est le dénominateur de la fraction suivante $\frac{4}{5}$, & les deux termes de celle-ci 4 & 5 seront multipliés par 3 , dénominateur de la première fraction. $\frac{2}{3}$ donneront les produits $\frac{10}{15}$, & $\frac{4}{5}$ donneront ceux-ci $\frac{12}{15}$.

II. C A s. Multipliez $\frac{2}{3}$ par 24 produit de 4 par 6 , qui sont les dénominateurs des deux fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, & vous aurez celle-ci $\frac{48}{72}$, puis $\frac{5}{6}$ par 12 produit des autres dénominateurs , & vous aurez $\frac{60}{72}$; enfin $\frac{1}{4}$ par 18 produit des deux autres dénominateurs , & vous aurez $\frac{18}{72}$.

I. C A s. $5) \frac{2}{3} , 3) \frac{4}{5} = \frac{10}{15} , \frac{12}{15}$.

II. C A s. $24) \frac{2}{3} , 12) \frac{5}{6} , 18) \frac{1}{4} = \frac{48}{72} , \frac{60}{72} , \frac{18}{72}$.

Problème I. X.

66. Ajouter des fractions.

Solution qui sert de démonstration. Les dénominateurs ne servant qu'à indiquer (§. 61) en combien de parties l'entier est divisé , il suffit d'ajouter des numérateurs les uns aux autres comme $\frac{2}{7} , \frac{3}{7}$, est $\frac{5}{7}$, & ces trois $\frac{1}{9} , \frac{6}{9} , \frac{8}{9}$, est $\frac{15}{9}$, ainsi des autres.

Mais comme on ne peut comparer deux nombres ensemble , s'ils ne sont de la même espèce (§. 4.) il faut premièrement les réduire à la même dénomination (§. 65.) s'ils en ont de différentes : puis on ajoutera les numérateurs , & on écrira au dessous le dénominateur commun , par exemple $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15}$, en les réduisant à la même dénomination. Si on ajoute ensuite les deux numérateurs 10 & 12 , on aura $\frac{22}{15} = 1 + \frac{7}{15}$ (§. 62.)

SECOND EXEMPLE.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{48}{72} + \frac{12}{72} + \frac{18}{72} = \frac{78}{72} = 1 \frac{13}{12} = 1 \frac{1}{12} \text{ (§. 62. 64.)}$$

Problème X.

67. Soustraire une fraction d'une autre fraction.

Solution.

1°. Si les deux fractions ont des dénominateurs différens, réduisez-les à la même dénomination. (§. 65.)

2°. Retrancher un numérateur d'un autre, & ce qui reste s'écrira au dessous du dénominateur commun.

Soit donné, par exemple, $\frac{2}{3}$, — $\frac{1}{4}$ à soustraire; on les réduira à la même dénomination pour avoir $\frac{16}{24}$ & $\frac{6}{24}$, & on dira ensuite, 9 de 16 reste 5, & on écrira $\frac{5}{24}$; on aura donc $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{16}{24} - \frac{6}{24} = \frac{5}{24}$.

Démonstration.

C'est la même que celle du problème précédent.

Problème XI.

68. Multiplier une fraction par une autre fraction:

Solution.

Multipliez les numérateurs l'un par l'autre, & les dénominateurs aussi, quand même ils seroient différens; les produits donnent la nouvelle fraction que l'on cherche. Exemple, $\frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$. Autre; $\frac{4}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{4}{35}$.

Démonstration.

Quand on veut multiplier une fraction par une autre, c'est plutôt la diminuer que l'augmenter, puisqu'on cherche quelques unes de ses parties par

la division. (§. 15. 60.) car multiplier, par exemple, $\frac{4}{5}$ par $\frac{1}{7}$, c'est comme si on disoit, je veux diviser $\frac{4}{5}$ en sept parties, desquelles je veux prendre ou en avoir 3; (§. 61.) c'est-à-dire, diviser $\frac{4}{5}$ par 7, & multiplier le quotient par 3, & comme le dénominateur ne fait qu'indiquer en combien de parties l'entier est partagé (§. cit.) ; il faut diviser le numérateur de la fraction qu'on a à multiplier, par le dénominateur de l'autre. Pour pouvoir faire la division, il faut, de la fraction à multiplier, en faire l'autre; ce dont on viendra à bout, si on la multiplie par le dénominateur du multiplicateur 7, (§. 63.) afin d'avoir $\frac{28}{35}$ au lieu de $\frac{4}{5}$, dont la septième partie est $\frac{4}{7}$. Si l'on ajoute trois fois cette fraction, on aura $\frac{12}{7}$. Mais comme ce seroit tems perdu que de multiplier d'abord le numérateur 4 par le dénominateur 7, & de diviser ensuite le produit par 7, il faut simplement multiplier le numérateur de l'une par le numérateur de l'autre, & le dénominateur 5 par le dénominateur 7 de l'autre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque premiere.

69. On ne doit pas être surpris que dans le cas cy-dessus, le produit soit plus petit que ceux qui le produisent, car ce que l'on y nomme multiplication, n'est en effet qu'une véritable division, puisque je ne cherche pas à augmenter les parties d'un entier; mais à le diviser ou réduire en plus de parties qu'il n'étoit divisé auparavant.

Remarque seconde.

70. Si on a une fraction à multiplier par un nombre entier, on ne doit multiplier que le numérateur de la fraction par ce nombre entier, parce que le dénominateur ne fait qu'indiquer en combien de

parties l'entier est partagé (§. 61.) comme $\frac{1}{2}$ par 2 ; on a $\frac{2}{7}$, car on n'a d'autre dessein que de doubler, tripler, &c. la fraction ; mais si on veut diviser la fraction, il faut multiplier le dénominateur ; c'est la méthode dont on s'est servi dans la démonstration.

Problème XII.

71. Diviser la fraction $\frac{4}{9}$ par une autre fraction $\frac{2}{3}$.

Solution.

1°. Du dénominateur faites le numérateur, & du numérateur le dénominateur, comme $\frac{2}{3}$ mettez $\frac{3}{2}$.

2°. Multipliez ensuite comme dans le problème précédent (§. 68.) & vous aurez le quotient $\frac{12}{18} = 1 \frac{2}{3}$ (§. 62.) = $1 \frac{1}{2}$ (§. 64.)

Il faut toujours que les dénominateurs soient les mêmes ; s'ils ne l'étoient pas, il faut les réduire ; ensuite on divise le numérateur de la fraction à diviser par le numérateur de la fraction qui doit la diviser. Pour diviser $\frac{8}{9}$ par $\frac{4}{9}$, on divise 8 par 4, & le quotient 2 fait voir que $\frac{8}{9}$ contient deux fois $\frac{4}{9}$.

Démonstration.

Diviser une fraction par une autre, c'est chercher combien de fois l'une est contenue dans l'autre (§. 17.) Si elles sont réduites à la même dénomination, l'une contient l'autre autant de fois que le numérateur de l'une contient de fois le numérateur de l'autre ; parce que dans cette comparaison on peut négliger le dénominateur commun (§. 61.) Or, lorsqu'on réduit deux fractions à la même dénomination, le numérateur de la première se forme de ce même numérateur multiplié par le dénominateur de la seconde, & le numérateur de la seconde est formé de ce même numérateur multiplié par le dénominateur de la première. (§. 65.) On trouve

donc par conséquent les nombres qui doivent se diviser l'un par l'autre, en multipliant le nouveau diviseur par la fraction à diviser. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Comme on peut diviser un entier en plusieurs parties, & en prendre quelques-unes pour faire une fraction, on peut aussi diviser une fraction en plusieurs parties égales; ce qui fait une fraction de fraction: d'où l'on voit qu'une fraction n'a pas un rapport immédiat à l'entier, mais seulement à la fraction dont elle est partie; le $\frac{1}{4}$ d'un $\frac{1}{5}$ n'est pas le quart de l'entier, mais d'un cinquième de l'entier dont il fait partie.

Pour opérer sur les fractions des fractions.

Il faut auparavant leur donner un rapport immédiat avec l'entier; c'est-à-dire, les faire devenir simples fractions; ce que l'on fait ainsi.

Soit la fraction de fraction $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{4}$ de toise; je multiplie les deux dénominateurs ensemble; ce qui fait 12, & prenant 12 pour dénominateur, & 1 pour numérateur, je trouve la fraction $\frac{1}{12}$ de toise égale à $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{4}$ de toise; ce qui est évident puisque la toise contenant quatre quarts, & chaque quart contenant 3 tiers, la toise doit par conséquent contenir trois fois 4, ou 12 parties, telles que chacune soit le tiers de son quart; & conséquemment chacune de ces parties est la 12 partie de la toise.

DEFINITION XII.

72. Si l'on multiplie un nombre quelconque (2) par lui-même; le produit (4) s'appelle *Nombre quarré*; & le nombre 2 à l'égard de ce produit se nomme *Racine quarrée*.

DEFINITION XIII.

73. Le nombre quarré 4 multiplié par sa racine 2, donne le produit 8 qui s'appelle *Nombre cube*, & sa racine 2 prend le nom de *Racine cubique* de ce même nombre.

DEFINITION XIV.

74. Extraire la racine quarrée d'un nombre ; c'est trouver un nombre qui multiplié par lui-même, produise le nombre proposé.

DEFINITION XV.

75. On extrait la racine cubique d'un nombre ; quand on trouve un nombre , qui multiplié par son quarré, produise le nombre proposé.

Remarque.

76. Pour extraire les racines quarrées & cubiques, il faut bien sçavoir les nombres quarrés & cubes des neuf premiers chiffres.

Les voici.

Racines.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quarrés.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubes.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Avant de venir aux problèmes, & de proceder à leurs résolutions , je crois qu'il est à propos d'expliquer un peu plus au long ce que c'est que ces racines quarrées & cubiques. Il ne suffit pas de sçavoir que 1 est la racine quarrée de 1 , que 2 est

celle de 4 ; 3 celle de 9 , &c. Il faut de plus remarquer ,

1°. Qu'un nombre qui n'a que deux figures n'en peut avoir qu'une en sa racine , d'où il est aisé de conclure qu'un nombre quarré a autant de figures dans sa racine quarrée , que de fois il est divisible de deux en deux figures ; il peut arriver que la dernière tranche n'aura qu'une figure , sçavoir , quand leur nombre est impair , mais cela n'empêche pas que la racine quarrée n'ait autant de figures qu'il y a de tranches.

2°. On connoît que la racine quarrée d'un nombre composé de trois ou de quatre figures , a deux figures ; que la racine quarrée d'un nombre composé de cinq ou de six figures en a trois , & ainsi des autres , en prenant la plus grande moitié du nombre des figures quand il est impair.

3°. Que le quarré d'un nombre au dessous de 9 , ne peut avoir plus de deux figures , parce que 81 qui est le quarré de 9 , n'en a pas davantage.

4°. Que le quarré des deux plus petits chiffres doit avoir trois figures , puisque 100 est le quarré de 10 qui sont les deux plus petits chiffres.

5°. Que les deux plus grands chiffres comme 99 , ne peuvent avoir dans leur quarré plus de quatre figures ; ou ce qui est la même chose , que quatre figures n'auront jamais pour racines que deux chiffres.

6°. Quand on multiplie un nombre composé de plusieurs figures , comme 162 par 162 pour avoir le quarré du même nombre , le premier caractère 1 se nomme *Première Racine* , le second caractère 6 se nomme *Seconde Racine* , le troisième caractère 2 se nomme *Troisième Racine* , & ainsi de suite. Si donc on multiplie un nombre composé de trois figures , comme 162 par 162 ,

D'ARITHME'TIQUE. 43

le produit 26244 contient le quarré de la troisiéme racine par elle-même , puis le produit de la seconde par la troisiéme , & le produit de la premiere par cette même troisiéme. Ensuite le produit de la troisiéme & de la premiere par la seconde & son quarré , & de plus le produit de la seconde & de la troisiéme par la premiere avec son propre quarré.

Demonstration.

<i>Multipliez</i>	162
<i>Par</i>	<u>162</u>
<i>Premier Produit</i>	324
<i>Second Produit</i>	972
<i>Troisiéme Produit</i>	<u>162</u>
<i>Enfin le Quarré</i>	26244

Je dis , 2 fois 2 font 4 , ce qui fait le quarré de la troisiéme racine ; puis , 2 fois 6 font 12 , c'est le produit de la seconde racine par la troisiéme , ensuite 2 fois 1 font 2 , produit de la premiere par la troisiéme.

Je passe à la seconde racine , en disant , 6 fois 2 font 12 , produit de la troisiéme racine par la seconde , puis 6 fois 6 font 36 , c'est le quarré de la seconde par elle-même ; ensuite 6 fois 1 font 6 , c'est le produit de la seconde par la premiere.

Je viens à la premiere racine , en disant 1 fois 2 fait 2 , produit de la troisiéme par la premiere , puis 1 fois 6 fait 6 , produit encore de la seconde par la premiere ; ensuite 1 fois 1 fait 1 , c'est le quarré de cette premiere.

Lorsque le nombre n'est composé que de deux figures , la chose est plus claire , comme on le voit dans l'Exemple suivant.

<i>Multipliez</i>	32
<i>Par</i>	32
<i>On trouve 1°</i>	64
<i>2°</i>	96
<i>Enfin le Quarré</i>	1024

Je dis, 2 fois 2 font 4, ce qui fait le quarré de la seconde racine, puis 2 fois 3 font 6, ce qui fait le produit de la premiere racine par la seconde : ensuite 3 fois 2 font 6, ce qui donne un second produit de la seconde racine par la premiere ; enfin 3 fois 3 font 9, qui est le quarré de la premiere.

On doit dire la même chose de tous les autres nombres composés, soit de deux, de trois, de quatre, de cinq figures, &c. car, comme nous l'avons vû ci-dessus, le quarré d'un nombre composé de trois figures contient le quarré de la premiere racine, plus un produit fait du double de la premiere par la seconde, plus le quarré de la seconde, puis un produit fait du double des deux premieres racines par la troisiéme, ensuite le quarré de la troisiéme.

Le nombre est-il composé de quatre figures pour sa racine ? son quarré doit renfermer tous les produits d'un nombre qui n'en a que trois, & de plus, un produit fait du double des trois premieres racines par la quatriéme, & encore le quarré de cette quatriéme par elle-même. Il en est ainsi des autres nombres qui ont cinq, six, &c. figures.

Problème XIII.

77. Extraire la racine quarrée de quelque nombre que ce soit.

Solution.

1°. Partagez par tranches les chiffres proposés : mettez-en deux dans chacune en commençant par la droite : s'il ne s'en trouve qu'un dans la dernière à gauche, n'en mettez qu'un, mais jamais trois dans aucune tranche ; le nombre des tranches donne le nombre des racines.

2°. Cherchez dans la table des racines le nombre carré qui approche le plus du nombre contenu dans la première tranche à gauche, duquel vous soustrairez ce carré, & vous écrirez sa racine derrière un petit arc mis à côté du nombre donné, comme l'on met le quotient dans la division.

3°. Après avoir écrit le reste (s'il y en a) joignez à ce reste les chiffres de la seconde tranche qui doivent servir de dividende, puis doublez la racine trouvée, & divisez par le double de cette racine les chiffres à diviser, & le quotient qui en viendra fera la seconde racine, que vous marquez à côté de la première.

4°. Ecrivez ce qui reste (s'il y en a) puis vous abaissez à côté de ce reste le second chiffre de la même tranche, & ôtez de ces chiffres le carré de la seconde racine.

5°. Continuez l'opération par la même méthode, si le nombre proposé a plus de deux tranches ; & par ce moyen vous aurez trouvé la racine carrée du nombre donné. La preuve se fait en multipliant la racine par elle-même, car le produit doit être le nombre proposé.

E X E M P L E.

Soit proposé 6789 dont il faut trouver la racine quarrée.

$$\begin{array}{r}
 67 \overline{)89} \quad (82 \text{ Racines.} \\
 \text{Quarré de } 8 = 64 \\
 \text{Reste } \dots 3 \overline{)8} \\
 \quad 16 \text{ double de la premiere Racine } 8 \\
 \text{Reste } \dots 6 \overline{)9} \\
 \text{Quarré de } 2 = \dots 4 \text{ soustrait de } 69 \\
 \text{Reste } \quad 65
 \end{array}$$

Preuve

$$\begin{array}{r}
 82 \\
 82 \\
 164 \\
 \hline
 656 \\
 \text{Reste } \dots 65 \\
 6789
 \end{array}$$

Les tranches étant faites , je vois que le nombre a deux racines (§. 77) je dis ensuite , le quarré qui approche le plus de 67 est 64 , donc la racine est 8 : je pose 8 à la racine , je soustraïs le quarré de 8 de 67 , il reste 3 , auquel je joins le chiffre 8 de la seconde tranche ; je divise ce nombre 38 par le double de la racine trouvée qui est 16 , & le quotient 2 est la seconde racine ; il me reste 6 , à côté duquel j'abaisse 9 , & j'ôterai le quarré 4 de 69 ; il reste 65 , parce que le nombre proposé n'est pas exactement quarré.

Pour donner un plus grand jour aux regles posées cy-dessus , soit l'opération suivante.

Soit le nombre 214369, dont il faut extraire la quarrée.

21|43|69| le même nombre partagé en tranches.

1 ^{re} Racine	4	(463 Racine quarrée.	
	Reste 5 43	Preuve	463
Double de la 1 ^{re} Racine	86	Seconde Racine	463
	Reste 27,69		1389
Doubles des 2 1 ^{eres} Racines	— 9 2,3	Troisième Racine	2778
	000		1852
			214369

Après avoir disposé les chiffres en tranches, je cherche le plus grand quarré qui se trouve dans la premiere tranche à gauche, comme ici dans 21 je trouve 16 dont je prends la racine 4, je la mets sous 21, & au quotient je soustrais ensuite le quarré 16 de 21, il reste 5 que je pose au-dessous de la racine 4, après avoir tiré une ligne sous 4, puis devant 5, j'abaisse les deux chiffres de la seconde tranche, ce qui me donne 543 : je double ensuite la premiere racine, & je mets ce double 8 sous la pénultième figure de 543, observant, s'il y en a plusieurs, de mettre toujours la dernière figure à droite de ce double sous la pénultième cy-dessus. Puis je divise par ce double les deux premiers chiffres, disant ; en 54 combien de fois 8, je trouve 6 fois, je pose donc 6, qui est la seconde racine après 8, & je la mets aussi au quotient après la premiere. Il me reste 6, devant lequel j'abaisse la seconde figure 3 de la seconde tranche, ce qui me donne 63, j'en soustrais le quarré 36 de la seconde racine 6, il me reste 27, devant lequel nombre à droite j'abaisse les figures de la troisième tranche,

ensuite je divise 2769 par le double 92 des deux premières racines 46 , & je dis, en 27 combien de fois 9 , je trouve 3 qui est la troisième racine que je mets au Quotient ; & comme il ne reste rien , & que tous les chiffres ont été abaissés , je conclus que les trois racines trouvées font la racine quarrée du nombre proposé.

Remarque I.

Si le nombre donné n'étoit pas exactement quarré , il faut ajouter le reste à la preuve faite par la multiplication pour avoir ce que l'on cherche.

Remarque II.

78. Lorsque le nombre proposé n'est pas exactement quarré , en ajoutant 2 , 4 , &c. chiffres à droite , on aura 10 , 100 , &c. parties pour continuer l'opération : car si on divise en 100 parties égales une unité du nombre quarré (ce qui se fait en la multipliant par 100) la racine sera divisée en dix parties : dans ce cas on réduit par la multiplication le nombre proposé en des especes plus basses , quand il y en a , & pour lors on peut négliger ce qui reste comme très-peu de chose , n'étant qu'une partie de l'espece , & non de l'entier.

Soit par Exemple , à extraire la racine quarrée de 345 , on opérera comme dans l'Exemple cy-joint.

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{)45} \qquad \qquad (18 \frac{57}{100} \\
 \underline{1} \\
 2 \overline{)45} \\
 \underline{28} \\
 224 \\
 \hline
 2.1 \overline{)0.0} \\
 \underline{356} \\
 1825 \\
 \hline
 27.5 \overline{)0.0} \\
 \underline{3707} \\
 25949 \\
 \hline
 1551
 \end{array}$$

Remarque III.

Si le nombre a plusieurs racines comme les précédents, il faut toujours doubler les racines trouvées pour servir de diviseur ; la première doublée sert pour la seconde tranche : le double de la première & de la seconde prises ensemble sert pour la troisième, &c. On soustrait ensuite le carré de la nouvelle racine trouvée ; c'est la manière ordinaire d'opérer. Quand quelques-unes des tranches ne donnent point de chiffres positifs pour racines, on met un zéro au quotient pour racine, & l'on passe à la tranche suivante.

Problème XIV.

79. Extraire la racine cubique d'un nombre donné.

Solution.

1°. Partagez par tranches les chiffres de trois en
Tome I. D

trois en commençant par la droite , & vous aurez autant de chiffres dans la racine , que de tranches.

2°. Cherchez dans la table (§. 76.) le nombre cubique qui approche le plus de celui que renferme la premiere tranche , duquel vous le soustrairez : & vous mettrez au quotient la racine de ce nombre cubique.

3°. Ecrivez sous le premier caractère de la tranche suivante le triple du quarré de la premiere racine , comme diviseur , faites ensuite la division à l'ordinaire , & vous aurez la seconde racine.

4°. Multipliez le diviseur par le quotient , & écrivez dessous le produit qui en viendra ; de façon que le dernier caractère à droite du produit du quarré triplé du nouveau quotient , multiplié par le quotient précédent , soit placé sous le second caractère de la même tranche , & sous la dernière à droite , le nombre cube de ladite racine. Faites enfin une somme de ces trois produits , que vous soustrairez des chiffres du nombre cubique écrit au-dessus.

5°. Faites la même opération pour les tranches suivantes , selon la troisième & la quatrième règle , & vous trouverez la racine que vous cherchez.

D'ARITHMETIQUE. 51

EXEMPLE.

Soit le nombre donné 47437928 dont on veut extraire la racine cubique.

	47 437 928	(362 racines.
Nombre cubique	27 :::::	
	20 437:::	
Diviseur	27 :::::	= 9X3 triple du □ de la 1 ^{re} racine.
Produit du diviseur par le	162 ...	Nouveau quotient.
Produit du triple du □ par le	324 ...	Premier quotient.
Nombre cube de la seconde	216 ...	Racine.
	19656 ...	
Somme des produits	781 928	
Diviseur	3888 ..	
Produit de la division par le	7776 ..	Nouveau quotient.
— du triple du □ par le	432 ..	Premier quotient.
Nombre cube du nouveau quotient	8 —	ou de la troisième racine.
	781928	
Somme des produits	000 000	

Il faut remarquer que quand il y a plus de deux tranches, on opere à la troisième, en considerant les deux premieres racines, comme si elles n'en faisoient qu'une : à la troisième tranche on ne prend les trois racines que pour une seule, &c.

Remarque.

80. Si l'on divise en 1000 parties égales une unité dans le nombre cubique (ce qui se fait en la multipliant par 1000) la racine se divisera en dix parties (§. 73.) Si donc le nombre donné n'étoit pas précisément un nombre cubique, il faudroit lui ajouter à droite trois chiffres pour dix parties, & puis trois

Dij

pour cent parties, &c. ensuite on continuera l'opération selon les règles ordinaires.

Si, par Exemple, il falloit tirer la racine cubique de 3.

$$\begin{array}{r}
 3\ 000\ 000 \quad (1\frac{44}{100}) \\
 \underline{1\ \dots} \\
 2.000 \\
 3.. \quad \text{Diviseur.} \\
 \underline{1\ 2..} \\
 48. \\
 \underline{64} \\
 1\ 744 \\
 \underline{256.0.0.0} \\
 588.. \\
 \underline{2352..} \\
 672. \\
 \underline{64} \\
 241\ 984 \\
 \underline{1\ 4016}
 \end{array}$$

Veut-on voir si l'opération est bien faite ? on multipliera le nombre trouvé par lui-même, & le produit aussi. On ajoutera ensuite à ce second produit ce qui pourroit être resté ; & l'on connoîtra que l'opération est bien faite, si le nombre proposé se trouve dans la somme qui en viendra. (§. 75.)

D'ARITHMETIQUE: 53

Preuve. 144 *Racine.*

$$\begin{array}{r}
 144 \\
 \hline
 576 \\
 576 \\
 \hline
 144 \\
 \hline
 20736 \quad \text{Nombre carré.} \\
 144 \\
 \hline
 82944 \\
 82944 \\
 \hline
 20736 \\
 \hline
 2985984 \\
 14016 \\
 \hline
 3000000 \quad \text{Nombre cubique.}
 \end{array}$$

Théorème II.

81. Dans la proportion géométrique, le produit du premier terme par le quatrième, est égal au produit du second par le troisième.

E X E M P L E.

$$\begin{array}{r}
 3.6 :: 4.8 \\
 4 \quad 3 \\
 \hline
 2 \quad 4 = 24
 \end{array}$$

On voit clairement dans cet Exemple que 3×8 produit des extremes $= 24$, & que 6×4 produit des moyens $= 24$. La même chose arrive toutes les fois que les termes sont en proportion géométrique.

Démonstration.

Le second terme est égal au premier multiplié par l'exposant de la raison ; le quatrième est égal au

D iij

troisième multiplié par le même exposant (§. 53.) Dans l'exemple proposé, 2 est l'exposant de la raison ; parce qu'il déclare combien de fois 3 est contenu dans 6, & 4 dans 8. Comme 8 multiplicateur de 3 est le double de 4 multiplicateur de 6 qui n'est que le double de 3, il est évident que 3 multiplié par un multiplicateur double de celui de 6, doit donner un produit égal à celui de 6, & par conséquent $3 \times 8 = 24$, $6 \times 4 = 24$; donc les produits du premier terme par le quatrième, & celui du second par le troisième sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

82. Si trois nombres sont en proportion, en sorte que celui du milieu serve pour deux, c'est-à-dire de premier conséquent & de second antécédent, ce qu'on nomme proportion continue, comme $\div 4, 8, 16$, le produit des extrêmes sera égal au carré du moyen ; parce que la proportion est la même que celle-ci $4, 8 :: 8, 16$; & comme $8 \times 8 = 64$ qui est son carré, 4×16 , produit aussi 64, donc $4 \times 16 = 64$ carré du moyen. (§. 72.)

Théorème III.

83. Si quatre nombres ou quantités sont en proportion géométrique, la proportion sera toujours la même, malgré leur dérangement, comme le premier à la place du troisième, & le second à celle du quatrième, &c.

Démonstration.

Le second terme est égal au premier multiplié par l'exposant de la raison, & le quatrième est égal

D'ARITHMETIQUE. 55

au troisiéme multiplié par le même exposant (§. 53.) comme 2. 6 :: 3. 9. le second membre est donc au quatriéme ce que le premier est au troisiéme (§. 58.) & parce que dans la comparaison que l'on fait de l'un à l'autre, l'exposant de la raison reste toujours le même, la proportion ne change pas. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Les changemens dont il est parlé dans le théorème cy-dessus, peuvent se faire en sept manieres différentes, quand il s'agit seulement de la position des termes, où l'on verra qu'ils sont toujours en proportion géométrique, & que le produit des deux extrêmes sera toujours égal à celui des moyens. Il faut pourtant observer pour cela que les deux extrêmes soient toujours extrêmes, ou prennent la place des deux moyens, & que les moyens restent toujours moyens, ou deviennent tous deux extrêmes.

EXEMPLE.

	6. 2 :: 9. 3	6. 3 = 2. 9
1 ^{er} .	6. 9 :: 2. 3. <i>alternando</i>	6. 3 = 9. 2
2 ^e .	2. 6 :: 3. 9. <i>invertendo</i>	2. 9 = 6. 3
3 ^e .	2. 3 :: 6. 9	2. 9 = 3. 6
4 ^e .	3. 9 :: 2. 6	3. 6 = 9. 2
5 ^e .	9. 6 :: 3. 2	9. 2 = 6. 3
6 ^e .	3. 2 :: 9. 6	3. 6 = 2. 9
7 ^e .	9. 3 :: 6. 2	9. 2 = 6. 3

Le premier changement se nomme *alternando*; parce que l'on compare les grandeurs alternativement, la premiere à la troisiéme, & la seconde à la quatriéme.

Le second se nomme *invertendo*, ou *permutando*.

tando ; parce qu'on met les conséquens à la place des antécédens. Les autres n'ont d'autres noms que ceux qu'ils tirent de l'arrangement de leurs termes , ainsi dans le troisième on compare le premier conséquent au second , & le premier antécédent au second antécédent : dans le quatrième on compare le second conséquent avec son antécédent , & le premier conséquent à son antécédent , &c.

On peut encore faire deux changemens sans ôter la proportion. Le premier se nomme *addendo* , parce qu'il se fait en ajoutant chaque conséquent à son antécédent , ou chaque antécédent à son conséquent , comme

$$\begin{array}{l}
 6.2 :: 9.3 \dots\dots\dots 6.3 = 9.2 \\
 1^{\text{er}}. 6+2.2 :: 9+3.3 \dots 6.3+2.3 = 2.9+2.3 \\
 2^{\text{e}}. 6-2.2 :: 9-3.3 \dots 6.3-2.3 = 2.9-2.3 \\
 3^{\text{e}}. 6.6+2 :: 9.9+3 \dots 6.9+6.3 = 6.9+2.9 \\
 \quad 6.6-2 :: 9.9-3 \dots 6.9-6.3 = 6.9-2.9
 \end{array}$$

Le second changement se nomme *abstrahendo* ; parce qu'il se fait par la soustraction. Dans ces quatre exemples , le premier & le troisième qui se font *addendo* , se nomment aussi *componendo* , & le second & le quatrième se nomment *dividendo*. Or quand on dit $6+2.2 :: 9+3.3$, ou $6-2.2 :: 9-3.3$, c'est-à-dire , le premier antécédent plus ou moins son conséquent , l'on nomme cela *convertendo*.

En général , soit qu'on ajoute ou qu'on retranche , soit qu'on multiplie ou qu'on divise quatre grandeurs , qui sont en proportion géométrique , pourvu que ce soit par des grandeurs qui soient en mêmes raisons , la proportion subsistera toujours : elle sera par conséquent aussi dans leurs quarrés , leurs cubes , leurs quatrièmes puissances , &c. ou

D'ARITHMETIQUE. 57

leurs racines secondes , troisièmes &c. Cette proportion se trouvera également dans leurs doubles , leurs triples , &c. leurs tiers, leurs quarts, &c. parce que quatre grandeurs étant en proportion , leurs parties le sont aussi.

Problème XV.

84. Entre deux nombres donnés 8 & 72 , trouver un moyen proportionnel géométrique.

Solution.

1°. Multipliez les nombres donnés l'un par l'autre.

2°. Du produit 576 , tirez la racine quarrée 24 : (§. 77) ce nombre 24 fera le moyen proportionnel que vous cherchez. (§. 82.)

Problème XVI.

85. Trois nombres étant donnés , 3 , 12 , 5 ; trouver un nombre proportionnel , ou à deux un troisième.

Solution.

1°. Multipliez le second 12 , par le troisième 5 ; divisez le produit 60 par le premier nombre 3 : le quotient 20 est le quatrième nombre proportionnel. (§. 81.)

2°. Dans le second cas , multipliez le second 12 par lui-même , le produit sera 144 , que vous diviserez par le premier nombre 3 ; le quotient 48 fera le troisième proportionnel. (§. 82.)

Remarque première.

86. On appelle communément cette opération ; *La Regle de Trois* , parce qu'elle est composée de

trois termes par le moyen desquels on en cherche un quatrième. Elle est fort en usage tant dans la société & le commerce, que dans les Sciences. Elle n'a pourtant lieu que quand il s'agit des choses semblables exprimées par des nombres donnés, entre lesquels il y a de la proportion.

Soit proposé, par exemple, le problème suivant. Par un petit trou fait au fond d'un grand vase plein d'eau, il s'en écoule trois chopines dans l'espace d'une minute; on veut sçavoir combien il faut de tems pour qu'il s'en écoule 200. Dans ce cas il y a trois nombres, 3 ^{chopines} 1 ^{minute} 200 ^{chop.} mais comme la quantité de l'eau qui s'écoule n'est pas proportionnelle au tems, parce qu'elle s'écoule plus vite au commencement que dans la suite; il est évident que cette question ne peut se résoudre par la Regle de Trois.

Remarque seconde.

87. Il n'en est pas de même pour le commerce, les prix des choses sont censés proportionnels; car celui qui reçoit le double, le triple, &c. paye le double, le triple, &c. Le prix d'une certaine quantité de marchandises déterminées, une fois supposé, on trouve facilement par la Regle de trois, le prix de quelque quantité que ce soit de la même marchandise, ou la quantité qu'il faut de cette même marchandise pour quelqu'autre prix que ce puisse être. Soit donné l'exemple suivant, 4 pommes coutent 3 livres, combien aura-t-on de pommes pour 18 livres? il est évident qu'il doit y avoir autant de fois 3 liv. dans 18, qu'il faudra de fois 4 pommes pour la somme de 18 liv. c'est ce que l'on cherche, & que l'on trouve par la Regle de Trois qui suit.

$$\begin{array}{r}
 3^{\text{liv.}} - 18^{\text{liv.}} - 4^{\text{pommes}} \\
 \underline{4} \\
 72 \quad (24. \text{ pommes.}
 \end{array}$$

Car 18 multipliés par 4, le produit est 72, qui divisé par 3 donne le quotient 24; & ce quotient est le quatrième nombre que l'on cherche. De même 4 aulnes d'étoffe se vendent 3 liv. combien 22 aulnes $\frac{2}{3}$ se vendront-elles? Il est évident que 4 aulnes doivent se trouver autant de fois dans 22 $\frac{2}{3}$ que 3 liv. se trouvent dans le nombre que l'on cherche, & qui n'est autre que le quotient de l'opération de la Regle de Trois qui suit.

$$\begin{array}{r}
 4^{\text{aulnes}} - 22\frac{2}{3}^{\text{d'aulnes}} - 3^{\text{liv.}} \\
 \underline{3} \qquad \qquad \qquad 2 \\
 68 \qquad \qquad \qquad 68 \quad (17^{\text{liv.}} \\
 \qquad \qquad \qquad **
 \end{array}$$

Je dis, 3 fois $\frac{2}{3}$ d'aulnes font deux aulnes que je mets à part; puis 3 fois deux aulnes font 6, & 2 que j'avois font 8: je pose donc 8 au dessous de 3; je passe ensuite au second chiffre, en disant 3 fois 2 font 6, qui placés devant 8 font 68. Je divise 68 par le premier nombre 4, & j'ai le quotient 17, qui est le prix de 22 aulnes $\frac{2}{3}$.

L'opération sert elle-même de preuve à la Regle de Trois.

Remarque troisième.

88. On doit dire la même chose à l'égard des Ouvriers, dont la récompense est proportionnelle au tems qu'ils ont employé pour leur travail. La quantité même de l'ouvrage est proportionnelle au tems, s'ils font une égale quantité de besogne dans un

égal espace de tems. Elle l'est aussi à l'égard de chaque Ouvrier en particulier, si chacun finit la même tâche dans le même espace de tems. L'exemple suivant va le faire voir. Dans une heure de tems on peut lire 6 pages d'un livre : combien faudra-t-il de tems pour en lire 360 ?

$$\begin{array}{r} 6 \text{ pages} \quad 360 \text{ pages} \quad 1 \text{ heure} \\ \quad \quad \quad 1 \\ \hline 360 \quad \quad 60 \text{ heures.} \end{array}$$

Remarque quatrième.

89. Si les nombres donnés ne sont pas de la même espèce, n'ayant pas le même rapport avec les choses auxquelles ils répondent, il faudra les réduire à la même espèce pour opérer par la Règle de Trois; ainsi, l'on réduira les livres en sols, les sols en deniers; ou les toises en pieds, les pieds en pouces, &c. les heures en minutes, les minutes en secondes, &c. Un Ouvrier, par exemple, a fait son marché à 2 liv. 4 s. pour une toise $\frac{1}{2}$ d'ouvrage, combien gagnera-t-il s'il en fait 15 toises ? Je fais d'abord les réductions nécessaires, dans lesquelles je trouve 1°. qu'une toise $\frac{1}{2}$ est composée de 9 pieds; il faut ensuite que je cherche combien de fois on trouve 9 pieds dans 15 toises, je trouve 10 fois. Je trouve ensuite que 2 liv. 4 sols sont composées de 44 sols; il ne s'agira donc plus que de chercher combien dix fois 44 sols font de livres, je trouve 22 liv, je dois donc conclure qu'il faut payer 22 liv. pour un ouvrage de 15 toises, à un ouvrier qui a fait marché à 2 liv. 4 sols par toise $\frac{1}{2}$.

E X E M P L E.

1 toise $\frac{1}{2}$	15 toises	2 liv.	4 fois
6	6	20	
9 pieds	90 pieds	44 fois	
		10	
		440	
			20
			440 (22

Remarque cinquième.

90. Il arrive quelquefois que les fractions qui peuvent être de reste, demandent une division différente de celle qui est en usage ; on cherchera dans ce cas une fraction qui équivalente la fraction donnée, & dont le numérateur soit le même : le pied de Dijon, par exemple, est composé de 11 pouces 7 lignes, celui de Besançon, de 11 pouces 5 lignes, & le pied de Roi de 12 pouces. Pour réussir à faire une opération par la Règle de Trois, il faudra réduire les pieds en pouces, & les pouces en lignes, pour avoir de nouvelles fractions qui équivalent les fractions données.

Remarque sixième.

91. On trouve assez souvent la Règle de Trois *inverse* ou *indirecte* dans les livrets faits pour apprendre l'arithmétique ; elle est pourtant inutile, si l'on prend la peine de placer les nombres selon que la proportion le demande. 125 Ouvriers, par exemple, finissent un ouvrage en 6 mois, combien faudra-t-il d'ouvriers pour le finir en deux mois ? On voit sans peine que 2 mois sont contenus autant de fois dans 6, que la quantité des Ou-

62 E L E M E N S

vriers, qui finissent l'ouvrage en 6 mois, est contenue dans celle des Ouvriers qui le font en 2 mois; Car plus il y a d'Ouvriers qui travaillent, moins il faut de tems pour le perfectionner. On en sera convaincu en jettant les yeux sur l'opération suivante.

2 mois	6 mois	125 Ouvriers
		6
11		750
780	(375 Ouvriers	
222		

Remarque septième.

92. On ne peut quelquefois venir à bout de trouver le nombre que l'on cherche, qu'en faisant deux applications de la Regle de Trois. On donne communément un nom particulier à cette opération; les uns la nomment *Regle de Cinq*, les autres *Regle composée*.

Soit supposé cet exemple; 300 écus rapportent 36 écus de rente tous les deux ans, combien vingt mille écus en rapporteront-ils dans l'espace de douze ans? il faut premièrement faire l'application suivante de la Regle de Trois.

300 écus	. 20000 écus	36 de rente
	36	
	720000	
2		
720000	(2400 écus.	
333300		

Ensuite en faire une seconde pour sçavoir sur quel pied sera cette rente pendant 12 ans. La voici.

2^{ans}	12^{ans}	$2400^{\text{écus}}$
		12
$288\phi\phi$	$(14400^{\text{écus}})$	4800
22222		24
		28800

Remarque huitième.

93. Une seule opération par la Règle de Trois peut suffire pour les exemples que je viens de rapporter ; pour en être convaincu , il faut seulement remarquer , que puisque six cent écus rapportent la même rente par chaque année , que trois cent écus dans deux ans , & que 240000 en rapportent aussi dans une seule année autant que 20000 dans douze ans. Sans s'embarasser de calculer les espaces du tems , il faut simplement s'y prendre ainsi. Deux fois 300 , c'est-à-dire , 600 écus , donnent 36 écus de rente dans un an , combien douze fois 20000 , c'est-à-dire , 240000 écus en rapporteront-ils dans le même espace de tems ?

$300^{\text{écus}}$	2^{ans}	$20000^{\text{écus}}$	12^{ans}	$36^{\text{de rente}}$
2		12		
600		240000		
		36	22	
		1440000	$864\phi\phi00$	$(14400^{\text{écus}})$
		72	6666600	
		8640000		

Cette dernière méthode est préférable à l'autre ; parce que la première jette assez souvent dans des fractions ennuyeuses.

Remarque neuvième.

REGLE DE COMPAGNIE ET DE SOCIÉTÉ.

94. Il y a plusieurs occasions où l'on est obligé de réitérer plus d'une fois l'opération de la Règle de Trois. Trois personnes, par exemple, sont associées dans un commerce, de façon que chacun aura part au gain & à la perte, proportionnellement à ce qu'il aura mis pour le fond de la société. Il faut dans ce cas faire la Règle de Trois autant de fois qu'il y a d'associés ; car comme celui qui met le double doit gagner ou perdre le double, &c. il en sera à son égard comme la somme de la mise totale l'est à chaque mise particulière de la société, & comme le gain ou la perte commune l'est au gain & à la perte particulière de chacun.

Soit l'exemple suivant pour mettre la question dans tout son jour. Le gain que trois associés ont fait sur le fond de leur société est de deux mille écus : le premier a mis 1000 écus, le second 500, le troisième 300. Cherchons donc le gain que chacun en particulier doit retirer, proportionnellement à ce qu'il a mis. Je le trouve dans les calculs suivans.

Mise

Mise du 1^{er}. 1000 écus

— du 2^e. 500

— du 3^e. 300

Somme des trois mises. 1800

1800 écus

1000 écus

2000 gain

2 000

111

2000000

11111

2000000 (1111 $\frac{2}{18}$ écus gain du premier.

188800

111

1800 écus

500 écus

2000 gain

2 000

111

1000000

888

2000000 (555 $\frac{10}{18}$ écus gain du second.

188800

11

1800 écus

300 écus

2000 gain

2 000

33

600000

366

600000 (333 $\frac{6}{18}$ écus, gain du troisième;

188800

11

Preuve.

1111 $\frac{2}{18}$ gain du premier;

555 $\frac{10}{18}$ du 2^e.

333 $\frac{6}{18}$ du 3^e.

2000 écus total du gain.

Tome I,

E

Remarque dixieme.

R E ' G L E D ' A L L I A G E .

95. On se trouve dans la nécessité de réitérer la Regle de Trois dans diverses autres circonstances, comme dans la Médecine, la Pharmacie, & plusieurs arts & sciences, où d'une certaine quantité déterminée de choses d'espèces différentes, il faut composer un mélange, dont les poids de ces choses soient proportionnés les uns aux autres, relativement à leur force ou vertu connue. De trois simples, par exemple, qui entrent dans la composition d'un médicament, la dose de l'un est 4, de l'autre 5, & du troisième 2 onces, combien faudra-t-il de chacun pour faire un composé du poids de 8 livres? Opérez comme ici.

poids	{	du 1 ^{er} .	4 onces.
		du 2 ^e .	5
		du 3 ^e .	2
		Total	11 Onces.
11 Onces		8 liv.	4 Onces
		16	
		128 Onces	1
		4	176
		512	812 (46 $\frac{6}{11}$ poids du premier simple.
			111
			2

Je prends d'abord le total, 11 onces des trois doses posées, & je place le premier à gauche; ensuite la quantité que je veux composer de mélange 8 liv. puis une des trois doses données: après cela je divise les livres en onces par la multiplication,

D' ARITHME' TIQUE. 67

en difant, 6 fois 8 , &c. j'écris enfuite le produit & je le multiplie par la doze 4 que j'avois placé à droite. Enfin je divife ce produit par le total des trois dozes , & le Quotient m'indique la quantité qu'il faut de la doze que j'avois fupposé 4, pour former avec le quotient des deux autres opérations la quantité de 8 liv.

Il faut enfuite faire la même opération pour les deux autres dozes qui reftent.

11 onces	128 onces	5 onces
	5	1
	640	2 92
		646 (58 $\frac{2}{11}$ poids du fe-
		111 cond fimple.
		1

11 onces	128 onces	2 onces
	2	33
	256	396 (23 $\frac{3}{11}$ poids du
		111 3c. fimple

Preuve.

Poids du 1er. fimple	46 $\frac{6}{11}$ onces
du 2e.	58 $\frac{2}{11}$
du 3e.	23 $\frac{3}{11}$

Poids du total du médicament 128 = 8 liv.

Il n'est pas hors de propos d'ajouter à la Règle cy-deffus la méthode qui fuit ; elle eft d'un grand fecours , lorsque plufieurs chofes de même genre , mais différentes de valeur étant propofées pour faire un alliage , on veut trouver la quantité qu'il faut de chacune , pour compofer un nombre de parties , qui foit d'une moyenne valeur. Perfonne n'ignore que

E ij

dans ce cas, il ne s'agit que d'avoir égard aux proportions que ces choses ont entr'elles ; mais la difficulté est de trouver cette proportion. En voici le secret.

On propose quatre lingots d'un même métal, mais différens de valeur par le différent degré de perfection qu'ils ont acquis par une plus grande purification. La livre pesant du plus parfait vaut 24 liv. de monnoye, la livre du second en vaut 23. Celle du troisiéme est estimée 18 francs, & celle du quatriéme n'est estimée que 15. Combien faut-il prendre des uns & des autres pour faire un alliage dont la livre pesant puisse valoir 20 liv. de monnoye ?

1°. Prenez deux à deux la différence de chaque titre de valeur à celui qui est moyen.

Comme de 23 à 20 = 3

Celle de 18 à 20 = 2

Prenez aussi la différence de 24 à 20 = 4

Celle de 15 à 20 = 5

2°. Pour marquer la quantité qu'on doit prendre de chaque lingot, donnez au plus haut titre de valeur la différence du moindre, & au plus bas la différence du plus haut. La somme de ces quantités déterminera le nombre des parties qui composent le titre moyen.

Multipliez
par leur différences. $\left\{ \begin{array}{l} 2 \times 23 = 46 \\ 3 \times 18 = 54 \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} 4 \times 15 = 60 \\ 5 \times 24 = 120 \end{array} \right.$

— Prix moyen. —

Somme $14 \times 20 = 280$

— Produit égal aux produits particuliers.

D' ARITHME' TIQUE. 69

La méthode est de prendre deux parties du métal au titre de la valeur de 23 liv., & 3 de celui qui est au titre de 18 ; ensuite 4 de celui qui est à 15 , & 5 de celui qui est à 25. Ainsi la somme de toutes ces différences multipliées chacune réciproquement par les différens prix , font une somme de 280 , qui est égale à cette même somme multipliée par le prix moyen 20.

Les parties que l'on cherche pour composer l'alliage , doivent être entr'elles comme leur différence au prix moyen , de sorte que la partie qui en approche le plus , fournisse davantage que celle qui en approche le moins. D'ailleurs les produits des parties provenus de la multiplication de chaque quantité par son propre titre , doivent faire une somme égale au produit de la somme des différences , par le prix moyen : ce que l'opération a démontré.

Remarque onzième.

96. On employe quelquefois certaines méthodes qu'on nomme *Pratiques Italiennes*. Voici les plus utiles. Trouver par la Regle de Trois un quatrième nombre proportionnel à trois autres donnés. (§. 85) Si l'on divise deux nombres par le même nombre , les Quotiens sont en même raison que les nombres divisés (§. 59) : Divisez exactement , s'il est possible , le premier & le second , ou (§. 83) le premier & le troisième par un même nombre , & leur substituez leurs quotiens.

Remarque douzième.

97. Si le premier ou le troisième nombre étoit 1 , & que l'autre de ces deux ne fut pas trop grand , enfin que celui du milieu fût composé de différentes

espèces, sans qu'il soit besoin de faire la réduction marquée dans le (§. 89.) on fera le calcul de cette façon ; je suppose que pour former la longueur d'une aulne, il faut 3 pieds 4 pouces & 6 lignes.

$$\begin{array}{r} \text{Aulne 1} \quad 3 \text{ pieds} \quad 4 \text{ pouces} \quad 6 \text{ lignes} \quad \text{combien 5 aulnes} \\ \hline \text{Je trouve 16} \text{ pieds} \quad 10 \text{ pouces} \quad 6 \text{ lignes} \end{array}$$

Remarque treizième.

98. Si deux nombres de même dénomination ne diffèrent que d'une unité plus ou moins, on abrège tous les calculs par la méthode suivante. Supposez que la longueur de 5 toises est de 30 pieds, combien en faudra-t-il pour 4 toises ?

$$\begin{array}{r} 5 \text{ toises} \quad 30 \text{ pieds} \quad 4 \text{ toises.} \\ \text{Diviseur} \quad 5 \quad 24 \end{array}$$

Comme la différence de 5 à 4 n'est qu'une partie de moins, c'est-à-dire, un cinquième, divisez 30 par 5, & soustrayez le quotient 6 de 30 : il reste 24 qui est le nombre cherché.

AUTRE EXEMPLE.

8 aulnes sont composées de 24 pieds, combien 9 aulnes ? 9 n'excédant 8 que d'un huitième, divisez 24 par 8, & ajoutez le quotient 3 à 24. La somme 27 fera le nombre cherché.

Quelques-uns joignent aux Règles précédentes, celles d'une & de deux fausses positions : mais comme elles n'appartiennent pas à l'Arithmétique, nous ne les mettrons point ici. Il y a plusieurs autres Règles qui ne diffèrent de celles que nous avons donné que par leurs noms, qu'elles ont pris de diverses

applications qu'on en a faites dans le commerce : & comme les noms ne changent pas l'essence des choses , on peut compter qu'on trouvera dans ce petit traité toutes les Régles de l'Arithmétique.

ARITHMETIQUE

Sans Chiffres , & rendue palpable ,

par le Docteur SAUNDERSON.

C'EST une chose aussi merveilleuse que certaine , que le sçavant & ingénieux Docteur Saunderson , feu Professeur Lucasiën pour les Mathématiques dans l'Université de Cambrigde , malgré son aveuglement , ait été capable cependant de faire des Calculs Arithmétiques & Algébriques fort longs & très compliqués. Cela paroît sans contradiction par son chef d'œuvre d'algèbre qu'on vient d'imprimer , & par les autres monumens indubitables qui existent encore. Il avoit inventé pour son usage une façon de marquer très-commode pour les longs calculs & les nombres considérables, qu'il sçavoit exprimer sur une planchette, ou table à calculer , avec laquelle il pouvoit faire aisément toutes les opérations de l'Arithmétique , par le seul sens du toucher , ce qui fait que nous l'appellons *Arithmétique palpable*. Comme par le moyen de Madame Saunderson j'eus la facilité de voir & d'examiner divers modèles de cette espèce d'Arithmétique , qu'il avoit par bonheur perfectionné avant sa mort ; quoiqu'il n'eût laissé aucun éclaircissement là-dessus qui puisse servir à découvrir sa

méthode, j'ai cependant eu la curiosité de me proposer à moi-même de déchiffrer, pour ainsi dire, les modèles ; heureusement j'en suis venu à bout. Comme d'autres pourroient avoir la même curiosité, & que d'ailleurs cette méthode peut être d'une grande utilité aux personnes qu'un pareil malheur mettroit dans le même cas, j'en donnerai une description exacte & succinte.

La table calculatoire étoit une planche d'un bois mince & poli, un peu plus grande qu'un pied en quarré, elle étoit élevée sur un petit chassis ou pied, de façon qu'on en pouvoit toucher également le dessus & le dessous. Cette planche étoit divisée par un grand nombre de lignes parallèles à égale distance, & par un pareil nombre d'autres faisant un angle droit avec les premières. Les bords de cette table étoient divisés par des entailles, environ à la distance d'un demi pouce l'un de l'autre, & chaque entaille comprenoit cinq des parallèles susdites, de façon que chaque pouce quarré étoit divisé en cent petits quarrés. A chaque point d'intersection la planche étoit percée par de petits trous, capables de recevoir une épingle. C'étoit par le secours de ces épingles, fichées jusqu'à la tête dans ces trous, qu'il exprimoit ses nombres. Il employoit deux sortes d'épingles, des grosses & des petites, au moins leur tête étoit-elle différente, & pouvoit aisément se distinguer par le toucher. Toutes les pointes de ces épingles étoient coupées, & il en avoit une grande provision dans deux boîtes qu'il avoit toujours à côté de lui quand il calculoit : tels étoient ses instrumens, dont nous allons présentement faire voir l'usage.

Fig. 1^{re}. Pour cet effet nous observerons d'abord que chaque figure numérale avoit sur cette table son

petit carré particulier , consistant en quatre de ces petits carrés contigus dont nous venons de parler, lesquels par conséquent laissoient un petit intervalle entre chaque figure , & ces figures numerales étoient de différente valeur , suivant la différente grosseur , ou la position d'une ou de deux épingles , dont elles étoient toujours composées. Dans cette intention il avoit imaginé l'analogie ou façon de marquer suivante , qu'il observoit toujours soigneusement.

Une grosse épingle dans le centre du carré (elle Fig. 2.
ne se plaçoit jamais ailleurs que dans chaque centre) marquoit toujours un zéro , ou 0 ; c'est pourquoi je l'appellerai dorénavant ainsi. Son principal employ étoit pour conserver l'ordre & l'égalité de distance entre chaque rang de chiffres. Ce zéro étoit toujours présent , excepté dans le seul cas de l'unité. Alors pour l'exprimer on ôtoit la grosse épingle du centre , & l'on y en substituoit une petite. Pour le 2 , on remettoit d'abord le zéro à sa place , & l'on plaçoit la petite épingle précisément au-dessus du zéro. Pour le 3 le zéro restoit à sa place , & l'on avançoit la petite épingle à droite dans l'angle supérieur. Pour le 4 , la petite épingle descendoit , & se plaçoit justement vis-à-vis le zéro à droite. Pour le 5 la petite épingle descendoit , & étoit placée à l'angle d'en bas , toujours à droite. Pour le 6 , la petite épingle reculoit à gauche , & venoit se placer perpendiculairement sous le zéro. Pour le 7 , la petite épingle reculoit encore à gauche , & se plaçoit dans l'angle inférieur. Pour le 8 , la petite épingle remontoit , & se mettoit justement vis-à-vis le zéro à gauche. Pour le 9 enfin , la petite épingle remontoit encore , jusqu'à l'angle supérieur du zéro , toujours à gauche. C'est ainsi qu'il

arrangeoit ses chiffres par une façon de marquer uniforme & naturelle, qui pouvoit fort bien s'appercevoir & se distinguer au toucher, & pour faire comprendre plus distinctement l'arrangement de ces chiffres, je les ai représenté dans la figure première & dans la seconde.

De cette maniere il pouvoit coucher par écrit (pour ainsi dire) sur sa table, quelque nombre que ce fût; & en promenant légèrement ses doigts dessus, il pouvoit y lire aisément, & connoître ce qui y étoit représenté. Les grosses épingles ou zéro qui restoient toujours au centre de chaque quarré, assez proches & à égale distance les uns des autres, étoient des guides sûrs qui servoient à le conduire le long de chaque rang, en assuroient les limites, & prevenoient la confusion qui sans cela auroit pû survenir parmi les chiffres. Comme trois paralleles perpendiculaires suffisoient pour chaque chiffre, de même trois paralleles horisontales suffisoient pour un rang de chiffres, & les trois au dessous pour un autre rang, & ainsi de suite sans aucun danger de s'embrouiller.

Presentement il n'est pas difficile de concevoir comment il pouvoit avoir plusieurs rangs de chiffres en même tems sur sa table, l'un dessous l'autre, ou comment il pouvoit faire dériver un nombre d'un autre; en un mot, comment il pouvoit faire tous les calculs nécessaires, en changeant ses épingles de place, ce qu'il faisoit avec une adresse & une facilité si grande, que cela causoit une surprise agréable à ceux qui le regardoient. On dit même qu'il pouvoit quitter au milieu d'un calcul trop long, & s'y remettre quand il lui plaisoit; & qu'il en appercevoit tout d'un coup les conditions, en promenant les doigts sur sa table. Voici un expédient

fort naturel qui auroit pû lui abrégé beaucoup ses opérations , furtout dans les grands calculs , c'est pourquoi je ne doute nullement qu'il n'y ait eu souvent recours. C'est de préparer sa table avant d'opérer , (ce qu'il pouvoit faire faire par tout autre que lui) en remplissant chaque troisiéme trou , de 3 en 3 lignes , avec une grosse épingle ou zéro ; alors quand il vouloit travailler , il n'y avoit pas autre chose à faire que de déterminer chaque chiffre en ajoutant une petite épingle dans l'endroit convenable ; il n'y avoit , (comme l'on a dit) que le seul cas de l'unité à exprimer , qui pouvoit l'obliger alors de changer la grosse épingle ou zéro , en une petite , pour marquer cette unité.

Les modèles de cette Arithmétique que j'ai examiné & réduit aux chiffres ordinaires , sont assurément des tables Arithmétiques qu'il avoit calculées , & qu'il conservoit pour son usage. Mais de sçavoir à quel dessein elles ont été faites , c'est ce qui n'est pas aisé de découvrir. Elles paroissent avoir beaucoup de rapport avec les tables des sinus naturels tangentes & secantes ; mais je laisse aux recherches des curieux de trouver leur véritable usage. Ce sont quatre pièces d'un bois solide de la forme d'un parallépipede rectangle , chacune longue environ de 11 pouces , de 5 & demi de large , & d'un peu plus d'un demi pouce d'épais. Les deux côtés opposés de chaque pièce étoient divisés par des petits quarrés , suivant la méthode de la table décrite cy-dessus , mais elles n'étoient trouées que dans les places nécessaires où les épingles étoient enfoncées à demeure jusqu'à la tête. Chaque face représentoit neuf petites tables arithmétiques de 10 rangs de chiffres chaque , & chaque rang de chiffres , pour l'ordinaire , contenoit cinq figures ou chiffres. Fig. 1.

Pour faire plaisir aux curieux, j'ai dessiné en grand une de ces petites tables, comme je l'ai trouvée, avec l'interprétation que je lui donne. Voyez la figure 3.

Mais outre l'usage arithmétique de cette table, qui étoit, sans contredit, sa première & sa principale destination, il s'en servoit encore pour décrire de fort belles figures géométriques, qui consistoient en plusieurs lignes droites qui s'entrecoupoient à divers endroits, comme j'en ai vu quelques exemples. Il avoit deux façons de les tracer, soit en mettant les épingles sur les lignes, pour en représenter la figure, soit par des épingles placées seulement aux intersections de chaque ligne. Alors entortillant un brin de fil ou de soie autour de la tête de l'épingle, il pouvoit aisément représenter avec ce fil les lignes suivant son intention. S'il avoit aussi des lettres palpables, semblables à peu près aux caractères d'imprimerie, pour distinguer les différens points angulaires, & pour lui aider dans la démonstration des propriétés de ces figures, c'est ce qu'on ne peut sçavoir à présent. S'il avoit eu besoin de pareils secours, son génie fertile y auroit aisément suppléé. Il n'est pas difficile de concevoir pareillement comment il pouvoit aussi se servir de la même table pour représenter toutes sortes d'équations algébriques, & pour réduire ces équations, principalement en se servant des caractères dont je viens de parler, ou de quelque chose de semblable. Il pouvoit avoir des caractères dans la façon de ces épingles, pour les signes ordinaires de l'algèbre, & pour placer dans chaque opération. Ainsi cette table auroit ressemblé assez bien à une forme d'imprimerie, & je ne doute pas qu'il n'aye pû la lire par le seul toucher, pour peu qu'il eût voulu s'y appliquer. On

m'a assuré qu'il connoissoit ses lettres , & qu'il sçavoit épeler , de façon qu'il distinguoit les figures de chaque lettre, soit capitale , soit petite , & même qu'il s'amusoit quelquefois pour son plaisir , quand il en trouvoit l'occasion , à lire les épitaphes sur les tombeaux , avec ses doigts.

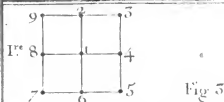
On l'a souvent entendu regretter de ne s'être point appliqué à apprendre à écrire dans sa jeunesse , & il assuroit qu'il auroit pû aisément y réussir. On ne trouvera plus ceci incroyable , quand on sçaura qu'on l'a vû souvent porter son jugement aussi certainement sur la bonté d'un instrument de Mathématique , & sur la justesse des divisions , en l'examinant seulement par le toucher , que les yeux les plus clairvoyans auroient pû le faire , jusques-là qu'on venoit ordinairement le consulter là-dessus. Enfin on ne peut plus douter qu'il ne fût capable de traiter toutes les espèces d'équations , & les calculs les plus compliqués avec beaucoup d'adresse & de capacité ; mais je n'entreprendrai point de déterminer jusqu'à quel point il pouvoit se reposer sur la force de son imagination (qui certainement étoit bien grande) & comment il avoit recours aux inventions mécaniques à mesure qu'il en avoit besoin.

De tout ce que je viens de décrire , & de plusieurs autres ingénieuses inventions de pareille nature , que j'ai vû , je conclurai par cette observation générale, que comme la connoissance & l'usage des symboles (ou des signes sensibles & arbitraires de nos idées intellectuelles) est d'une grande importance , & a beaucoup d'étendue dans toutes les parties des Mathématiques : il avoit inventé de nouvelles espèces de symboles mathématiques , inconnus & inouis jusqu'à présent , qui s'accommodoient particulièrement au besoin qu'il en avoit,

suivant les circonstances. Les symboles sensibles communément reçus, & en usage pour représenter les idées mathématiques, & pour les rapporter à notre imagination, ou à celles des autres, sont dérivés de nos deux sens principaux, la vûe & l'ouïe, & sont (pour m'exprimer plus facilement) audibles ou visibles. Il est vrai qu'il pouvoit faire usage des premiers, & acquérir beaucoup de connoissances par leur moyen, en conversant avec les autres, & principalement en écoutant la lecture des meilleurs Auteurs en mathématiques; mais il étoit entièrement privé du secours des derniers (je veux dire des symboles visibles) dont cependant nous trouvons l'usage si indispensable & si nécessaire, que c'est le seul moyen qui nous sert à acquérir la plus grande partie de nos connoissances en mathématique.

Qu'a-t-il donc fait pour surmonter cet obstacle qui nous paroît invincible, & pour satisfaire au désir violent qu'il ressentoit d'acquérir ces connoissances? il eut recours à un autre sens qu'il possédoit parfaitement, & substitua le toucher à la place de la vue, en inventant une nouvelle espèce de symboles Mathématiques que nous pouvons appeller *palpables ou sensibles*. Il s'en servoit pour rapporter les idées Mathématiques à son entendement, puisque l'entrée leur en étoit refusée du côté des yeux. Ainsi par le moyen de ces symboles imparfaits & différens, suivant les besoins qu'il en avoit, & par le secours d'une vive conception, & d'une persévérance obstinée, il fit des progrès admirables dans cette science. Voilà les instrumens (si peu convenables en apparence) avec lesquels il rapportoit à son imagination les plus difficiles & les plus sublimes idées des Mathématiques, & avec

arithmétique palpable.



94084
24186
41794
54284
63068
71880
78568
84358
89464
94080

ent les gros piquets qui servent d'indices ou de
voient les petites piquets qui servent pour.



lesquels il s'étoit rendu capable d'en déduire les applications les plus convenables & les plus utiles.

Nous devons donc avouer de bonne foi, nous qui jouissons de la vue & de l'entendement, que tout ceci nous paroît bien extraordinaire & merveilleux. Pour moi je ne puis me le représenter durant le cours de toutes ses études, que comme un génie vraiment Mathématicien, qui se roidissoit contre les plus grands obstacles, & qui en se passant des secours ordinaires, que la nature lui avoit refusé, fit le plus rude apprentissage, capable de décourager tout autre que lui dans ses études. Mais par une heureuse sagacité & une industrie opiniâtre, à chaque difficulté qu'il rencontroit, il trouvoit des expédiens pour les surmonter. Il étoit résolu, non à abandonner leur poursuite, mais à persister avec constance jusqu'à ce qu'il devint supérieur à ces obstacles, pour satisfaire à l'ambition demeurée qu'il avoit de tenir le premier rang parmi les Mathématiciens.

Remarque.

M. Saunderfon étoit originaire de la Province d'York; il eut le malheur de perdre entièrement la vue par la petite verole, à l'âge d'un an. Malgré cet accident, il vint à bout par la force de son génie, de faire des progrès si étonnans dans les Mathématiques, qu'on le trouva digne d'occuper la chaire de Professeur de Mathématiques dans l'Université de Cambrigde. Il a composé des Elémens d'Algèbre en Anglois, en deux volumes in-4°, qui y furent imprimés en 1741, quelques années après sa mort, aux dépens de l'Université. Ce petit traité d'*Arithmétique palpable*, qui en est extrait, est écrit par le Professeur qui lui succéda, & qui fut chargé de l'édition de son Ouvrage.



E L E M E N S D'ALGEBRE.



L'ALGEBRE ne diminue pas ordinairement la longueur du calcul, mais elle fait découvrir les voyes du calcul que l'Arithmétique n'enseignoit pas.

Les difficultés que l'on trouve à résoudre grand nombre de questions & de problèmes concernant les nombres, lorsqu'on veut se servir des règles ordinaires de l'arithmétique, ont fait chercher une autre méthode, qui par les principes les plus simples mît en état de découvrir ce que l'on cherche, sans fatiguer trop l'esprit.

Les principes de cette science ont été dans tous les tems très-simples & naturels; mais les dénominations barbares & la maniere obscure & embarrassée faisoient que peu de personnes s'y appliquoient. M. Descartes vint heureusement au secours, & la rendit beaucoup plus facile & plus parfaite, comme on peut le voir dans ce petit abrégé.

D E F I N I T I O N I.

1. L'*Algèbre* est la science de trouver, par le secours

secours des équations , des quantités qui ayent certaines relations avec d'autres connues & proposées.

Remarque.

2. Je veux trouver , par exemple , deux nombres , qui multipliés l'un par l'autre , donnent 60 pour produit , & qui simplement ajoutés fassent la somme 17. Voilà deux nombres proposés dans lesquels il faut que j'en trouve deux autres dont je n'ai d'autres connoissances , sinon que leur produit doit être égal au plus grand , & leur somme au plus petit.

L'algèbre me donnera le moyen de les trouver , & non-seulement pour ce cas-là ; mais elle me fournit des règles générales pour résoudre tous les autres de cette espèce , aussi-bien que les problèmes de calcul qu'on pourroit me proposer.

DEFINITION II.

3. L'*Arithmétique spécieuse* est celle qui dans les calculs , employe des signes au lieu de chiffres , & avec lesquels l'algèbre fait les mêmes opérations que l'arithmétique , & beaucoup d'autres que cette dernière ne sçauroit faire.

DEFINITION III.

4. On nomme *Quantité* , tout ce que l'esprit conçoit comme susceptible d'augmentation ou de diminution.

Hypothèse I.

5. On est convenu de représenter les quantités connues par les premières lettres de l'alphabet *a* , *b* , *c* , *d* , &c. & de marquer les quantités inconnues par ces dernières *x* , *y* , *z*.

Hypothèse I I.

6. Les lettres de l'alphabet, n'ayant pas comme les chiffres de l'arithmétique, une valeur déterminée, on pouvoit bien supposer que la lettre *a*, ou la lettre *b* représente un nombre tantôt plus grand, tantôt plus petit; mais comme ces suppositions auroient été fort embarrassantes, surtout dans un calcul un peu long, on est convenu des signes suivans. Le signe de l'addition est $+$ & s'exprime par *plus*; celui de la soustraction est $-$ & s'exprime par *moins*.

Remarque.

7. Quand je voudrai, par exemple, représenter la somme des deux quantités exprimée par *a* & *b*, j'écrirai $a + b$; c'est-à-dire, que *b* est ajouté à *a*, & je dirai *a plus b*, de sorte que si la valeur de *a* est 6, & celle de *b* 4, cette expression $a + b$ ou $6 + 4$ signifie 10. La différence de deux quantités s'écrit ainsi $a - b$, comme si je disois que la grandeur *b* est soustraite de la grandeur *a*, & je dirai *a moins b*: de manière que si la valeur de *a* est 5, & celle de *b* 4, cette expression $a - b$, ou $5 - 4$ signifie 1, parce que 4 ôtés de 5, il reste 1; de même $a > b$ signifie que *a* est plus grand que *b*, & $a < b$, veut dire que *a* est plus petit. Toute grandeur qui n'est précédée d'aucun signe, est censée positive, a , ou $+a$, c'est la même chose, & l'on appelle grandeurs semblables *a* & *a*, de même *b* & *b*; & grandeurs différentes *a* & *b*, ou *c* & *d*.

Hypothèse I I I.

8. On se sert communément de ce signe $\times$ pour

marquer une multiplication à faire ; quand on la veut faire effectivement , on se contente de les joindre , ou bien on les marque par une virgule (,) ou un point (.)

Remarque.

9. Si je veux multiplier a par b , j'écris le produit ainsi , ab , ou $a.b$, ou $a \times b$, mais je ne me servirai point de ce dernier signe $\times$.

Hypothèse IV.

10. Veut-on indiquer la multiplication de plusieurs quantités ou grandeurs ensemble par une autre , on renferme en parenthèse toutes les grandeurs qui doivent servir de multiplicande , & l'on met après la parenthèse avec , ou sans signe , ou une virgule entre deux , celle qui doit servir de multipliateur.

Remarque.

11. Ecrivez le produit de $a + b - c$ par d , ou $[a + b - c]d$, ou $d[a + b - c]$, ou de cette manière $\overline{a + b - c}, d$. Ordinairement on l'écrit ainsi $\overline{a + b - c} \times d$, ou bien $d \times \overline{a + b - c}$.

Hypothèse V.

12. Le signe de la division se marque par deux points (:) ou par une ligne tirée entre les grandeurs qu'on doit diviser & celles qui doivent servir de diviseur , comme dans les fractions.

Remarque.

13. Quand on doit diviser a par b , on écrit
F ij

pour le quotient, ou $a : b$, ou $\frac{a}{b}$, l'un & l'autre veut dire que a est divisé par b .

Hypothèse VI.

14. Quand on divise plusieurs grandeurs par une seule, ou une seule par plusieurs, on renferme toutes ces grandeurs ou quantités entre deux crochets comme dans la multiplication, ou l'on met seulement une virgule.

Remarque I.

15. Supposons que j'ai à diviser $a+b$ par c , je marquerai le quotient par $[a+b] : c$, ou par $\overline{a+b} : c$. Lorsque je veux diviser a par $b+c$, je le marquerai ainsi, $a : (b+c)$ ou $a : \overline{b+c}$. Enfin si $a+b$ par $c+d$, j'écris $(a+b) : c+d$, ou $\overline{a+b} : c+d$. Plus communément de cette manière $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{b+c}$, $\frac{a+b}{c+d}$, ou bien encore $\overline{a+b} : c$, ou $a : \overline{b+c}$, $\overline{a+b} : c+d$.

Quand on veut représenter deux grandeurs égales, on se sert de ce signe $=$, c'est-à-dire, que la grandeur qui est à gauche est égale à celle qui est à droite. $a=b$ marque que a est égal à b ; $ab=cd$, signifie que le produit de a par b est égal à celui de c par d ; $a+b=c+d$, signifie que la somme des grandeurs, a, b , est égale à la somme des grandeurs c, d , & ainsi des autres. Quelques auteurs, comme le pere Lami, ont employé le signe ∞ ou ∞ au lieu du signe $=$; mais ce dernier est aujourd'hui le plus en usage.

Des grandeurs sont nommées *complexes* quand elles sont jointes par le signe $+$ ou $-$, par exemple,

$a+b$, ou $c-d+f$, sont dites *grandeurs complexes*.

Remarque I I.

Il y a des grandeurs *positives* & d'autres *négatives*. On appelle *positives* celles qui sont précédées du signe $+$ comme $+a$, $+b$; les grandeurs *négatives* sont celles qui sont précédées du signe $-$ comme $-a$, $-b$. Cette dénomination n'empêche pas qu'elles ne soient aussi réelles que les positives. $-a$, & $+a$ sont deux grandeurs égales, mais dans un sens opposé, ce qui rend cette distinction réelle & non pas arbitraire. Deux Voyageurs, par exemple, font chacun 6 lieues, l'un à l'Orient, l'autre à l'Occident; je dirige mon intention du côté de l'Orient, celui qui aura pris cette route aura fait $+6$ lieues, tandis que celui qui a pris un chemin opposé, aura aussi fait -6 lieues: Les distances parcourues sont égales entre elles, mais prises dans un sens dont les signes $+$ & $-$ marquent l'opposition. Ainsi lorsque deux grandeurs semblables se rencontrent ensemble, & que l'une est positive & l'autre négative, elles se détruisent mutuellement, & cette opposition la rend égale à zéro, c'est pourquoi $+a-a=0$.

Remarque I I I.

Par le mot de *grandeur* en général, on entend tout ce qui peut s'augmenter ou se diminuer, & qui par conséquent a des parties. (§. 4.) Il y en a de deux sortes, l'une *successive*, dont les parties se succèdent, & n'existent jamais toutes à la fois; telle est la durée du tems. L'autre se nomme *permanente*, dont les parties existent en même tems. Celle-ci se divise en *discrete*, dont les parties ne sont pas liées,

comme sont les nombres , & tous les assemblages dont la continuité ou la liaison des parties n'est pas absolument nécessaire.

L'autre prend le nom de grandeur *continue* , dont les parties ont une étroite liaison , telles que sont toutes les choses matérielles.

On donne le nom de grandeur *complexe* à celle qui est composée de plusieurs autres , entre lesquelles se trouvent le signe $+$, ou le signe $-$; ainsi $a+b$ est une grandeur complexe , de même que $a+b-c$; mais ab , quoique formée par deux grandeurs , n'est pas une grandeur complexe , parce qu'il ne se trouve entre-elles ni le signe $+$ ni le signe $-$.

La grandeur *incomplexe* est celle qui n'est liée avec aucune autre par les signes $+$ ou $-$. Ainsi a , de même que ab , sont des grandeurs *incomplexes*.

Problème I.

16. Ajouter des grandeurs de même espèce , marquées par les mêmes signes ou par de différens.

Solution en forme de Regle.

1°. Faites l'addition de celles qui ont le même signe , & la même lettre , comme elle se fait dans l'arithmétique.

2°. Otez la plus petite quantité de la plus grande dans celles qui ont des signes différens , & marquez l'excès ou la différence avec le signe de la plus grande.

3°. Si les grandeurs ne sont pas semblables , écrivez-les de suite.

4°. Au lieu d'écrire chaque grandeur semblable séparément , il faut simplement mettre une fois la lettre qui les exprime , & à sa gauche le caractère

arithmétique qui marque le nombre des grandeurs exprimées ainsi $a+a+a+b+b$, s'écrit $3a+2b$.

E X E M P L E.

$$\begin{array}{r} a+2b-3c-5d \\ 3a-2b+6c+2d \\ \hline 4a \qquad +3c-3d \end{array}$$

Démonstration.

Les lettres étant des nombres indéterminés, on peut supposer que chacune est une unité; on peut donc ajouter les grandeurs qui sont exprimées par la même lettre, comme des choses de même espèce. (§. 4. Arithm.)

Les grandeurs marquées par le signe $+$ sont des grandeurs qui existent actuellement en réalité, & celles qui sont marquées par le signe $-$ n'ont pas une existence réelle. Si l'on a donc des grandeurs de l'une & l'autre espèce à ajouter, les secondes suppléent au défaut des premières, & il faut nécessairement dans ce cas, que la soustraction prenne la place de l'addition.

Remarque première.

Quand on veut ajouter des grandeurs algébriques, il faut les écrire les unes sous les autres comme dans l'arithmétique. Puis si elles ont le même signe, ajoutez-les en mettant ce même signe: si elles ne l'ont pas, écrivez la différence, en lui donnant le signe de la quantité qui est la plus grande.

Cette méthode s'appelle *corriger l'expression*. Cette réduction ne peut se faire que lorsque les quantités sont semblables.

$$\begin{array}{r} \text{Soit donné } 3a - 2b + 6c + 2d \\ \quad \quad \quad a + 2b - 3c - 3d \\ \hline 4a \quad 0 + 3c - 1d \end{array}$$

E X E M P L E.

Pour les Grandeurs différentes.

$$\begin{array}{r} 4a + 5b - 3d \\ 6c - 3f + 2g \\ \hline 4a + 5b - 3d + 6c - 3f + 2g. \end{array}$$

Voilà l'addition toute faite en les écrivant l'une après l'autre.

Remarque seconde.

17. Les quantités marquées au signe — sont estimées comme *dettes* ; les quantités au contraire marquées avec le signe + sont censées être de l'argent que l'on possède, sans que personne y prétende rien. C'est pourquoi les premières quantités sont appellées moins que rien, parce qu'il faut payer ses dettes avant que l'on puisse être censé ne devoir rien.

Remarque troisième.

18. Pour rendre ce calcul plus clair & plus évident, supposons que a veut dire 1^{liv.} b 1^{sol.}, c 1^{den.}.

$$\begin{array}{r} 7a - 9b + 5c, \quad 7^{\text{liv.}} - 9^{\text{f.}} + 5^{\text{den.}} \\ 3a + 5b - 9c, \quad 3 + 5 - 9 \\ \hline 10a - 4b - 4c, \quad 10^{\text{liv.}} - 4^{\text{f.}} - 4^{\text{den.}} \end{array}$$

On voit par-là que j'ai dix liv. mais que je dois 4 sols 4 deniers, parce que ce qui est marqué au signe — marque la dette, & que 10 a qui sont sup-

posés avoir ce signe + à gauche, marque un argent présent.

Problème II.

19. Soustraire des quantités algébriques marquées au même, ou à différens signes.

Solution.

1°. Ecrivez les grandeurs semblables, s'il y en a, les uns sous les autres ; si les signes sont les mêmes, retranchez la plus petite quantité de la plus grande, en faisant la soustraction comme dans l'arithmétique (§. 43. arithm.)

2°. Si la quantité que l'on doit soustraire est plus grande que celle de laquelle on veut la retrancher, ôtez néanmoins la plus petite de l'autre, & marquez le nombre restant par le signe —, si elles avoient toutes deux le signe + ; & si au contraire avant la soustraction elles avoient celui-ci —, vous mettrez devant le reste le signe +.

3°. Si les quantités avoient des signes différens ; ajoutez ensemble les quantités que vous devez soustraire, & marquez la somme qui en viendra par le signe qu'avoient les quantités desquelles vous deviez faire la soustraction. En un mot, changez les signes des quantités qui soustrayent, & faites la réduction.

$$\begin{array}{l} \text{Soit donné } 8a - 5c + 9d \text{ ou } 8 \text{ liv. } - 5 \text{ s. } + 9 \text{ d.} \\ \text{Dont on veut ôter } 6a - 8c - 7d \text{ ou } 6 \text{ liv. } - 8 \text{ s. } - 7 \text{ d.} \\ \hline \text{Reste } 2a + 3c + 16d \text{ ou } 2 \text{ liv. } + 3 \text{ s. } + 16 \text{ d.} \end{array}$$

En changeant les signes de la grandeur qui soustrait, on aura $-6a + 8c + 7d$, puis faisant la réduction avec ceux de $8a - 5c + 9d$, on a le reste $2a + 3c + 16d$.

Démonstration.

Chaque lettre étant prise pour une unité, on peut faire la soustraction comme dans les nombres dont la valeur est déterminée.

Pour trouver la différence de deux grandeurs, il faut changer le négatif en positif, & le positif en négatif, & faire la réduction de ce que l'on a fait. Dans l'arithmétique on ne change que le positif en négatif, parce que tout y est positif; mais comme l'un & l'autre se trouve dans l'algèbre, il faut nécessairement changer l'un & l'autre signe. Car on ne peut soustraire le négatif qu'en le rendant positif, en lui ajoutant réellement une valeur qu'il n'avoit pas. Ainsi quand on soustrait une grandeur négative, c'est comme si l'on soustrayoit les dettes de quelqu'un en les payant, ce qui augmenteroit son bien de cette quantité.

AUTRE EXEMPLE.

$$\begin{array}{r}
 9b + 15c - 7d + 8e - 1f \\
 6b + 20c - 9d - 9e + 7f \\
 \hline
 3b - 5c + 2d + 17e - 8f
 \end{array}$$

Procédez dans cet exemple comme dans le précédent; changez les signes & faites la réduction.

Démonstration.

Lorsque la plus grande quantité positive $+20c$ doit se soustraire de la plus petite également positive $+15c$, on soustrait plus d'unités qu'on ne peut en ôter, & par conséquent il faut mettre le signe $-$ devant le reste négatif qui vient de cette soustraction; on a donc $-5c$. Si l'on veut sou-

traire une plus grande quantité négative $-9d$; d'une plus petite $-7d$, il faut absolument ajouter de nouveau la quantité $9d$ qu'on avoit soustraite de plus qu'on ne pouvoit ; car la quantité $20c$ au lieu de la quantité $20c - 9d$, a été soustraite de $15c$: c'est pourquoi la quantité négative $-7d$ détruisant $7d$ ajouté à la positive $9d$, il reste la positive $2d$. On voit donc clairement , que dans tous ces cas il suffit de retrancher la plus petite grandeur de la plus grande , & de poser devant le reste le signe contraire $-$, si les grandeurs ont le signe $+$: & au contraire le signe $+$, si elles avoient celui-ci $-$.

Mais lorsque les signes sont différens , & que la grandeur négative $-9e$, par exemple , doit être soustraite de la positive $+8c$, il est évident , par ce que nous venons de dire , qu'il faudra lui ajouter la grandeur positive $9e$, qui est au-dessous , parce que la grandeur qu'on en avoit soustraite étoit plus grande qu'il ne falloit ; & c'est pourquoi *il naît de cette addition* la positive $+17e$. Si l'on avoit au contraire à soustraire la positive $+7f$ de la négative $-1f$, comme je ne puis retrancher sept grandeurs positives d'une seule négative , sans en faire sept négatives , j'aurai $-8f$; car si , par exemple , je dois un écu , & qu'on m'en retranche encore sept , au lieu d'un seul que je n'avois pas , il m'en manquera encore sept , qui ajoutés à un feront $-8f$. Par conséquent dans les deux cas , il ne faut qu'ajouter les deux grandeurs l'une à l'autre , & mettre devant la somme le signe qu'avoit la grandeur de laquelle on devoit soustraire l'autre.

AUTRE EXEMPLE.

*Pour les Grandeurs qui ne sont pas exprimées
par la même lettre.*

$$\begin{array}{r} 3a + 2b - 4d \\ 6c + 4f - 3g \\ \hline \text{Reste } 3a + 2b - 4d - 6c - 4f + 3g \end{array}$$

Changez les signes de la grandeur qui soustrait , puis écrivez de suite toutes les quantités comme elles sont cy-dessus , & la soustraction se trouvera faite. On ne doit point faire de réduction , parce que les grandeurs ne sont pas les mêmes , étant exprimées par des lettres différentes.

Problème III.

20. Multiplier des quantités les unes par les autres , marquées au même signe , ou non.

Solution.

10. Placez les grandeurs comme il est marqué (§. 8 & 9.) & faites la multiplication comme dans l'arithmétique. (§. 49.)

20. Faites bien attention que quand le signe du multiplicateur est le même que celui du multiplicande , le signe du produit sera toujours + , & si les signes sont différens on mettra celui-ci —.

EXEMPLE.

$a+b-d$	$10=8+4-2$
$a-b-d$	$2=8-4-2$
$-ad-bd+dd$	$-16-8+4$
$-ab-bb+bd$	$-32-16+8$
$aa+ab-ad$	$64+32-16$
aa	$0-2ad-bb+dd$
$20=64-48$	$0+4$

Démonstration.

Il est évident que $+$ multiplié par $+$ doit produire $+$ & de même $-$ par $-$ produira $+$; car *plus*, ou ce qui est le même, une grandeur positive multipliée par une autre positive, ne peut que produire une grandeur positive, & par conséquent $+$. Il n'est pas plus difficile à concevoir que $-$ multiplié par $-$ produira également $+$, car cette multiplication n'étant à proprement parler qu'une soustraction réitérée d'une grandeur négative, & cette soustraction ne pouvant se faire qu'en changeant $-$ en $+$, le produit sera nécessairement $+$. Si donc on multiplie -3 par -2 : comme *multiplier* est prendre le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, 2 ayant le signe *moins*, ne contient pas deux unités, mais -2 unités ; prendre -2 fois, c'est soustraire deux fois, & soustraire deux fois un défaut ou une dette, c'est donner 2 fois ce qu'il faut pour réparer ce défaut, ou acquitter cette dette. Donc prendre 2 fois le défaut -3 , c'est donner $+3$.

Le contraire arrive si l'on multiplie $-$ par $+$ ou $+$ par $-$; car pour lors le produit sera $-$, parce qu'il faut prendre le défaut ou la dette $-$ autant de

fois qu'il y a d'unités dans $+$, & que multiplier une dette est ajouter une négative. Dans le second cas il faudra prendre la grandeur $+$ non pas autant de fois qu'il y a d'unités dans la négative $-$ parce que cette grandeur négative ne contient pas, par exemple, deux unités, mais $- 2$ unités ; ainsi le signe du produit se trouvera négatif, car prendre $- 2$ fois, c'est soustraire deux fois. $+$ par $-$ doit avoir le signe $-$ parce que *plus moins*, indique plusieurs *moins*, $-$ par $+$ aura le même signe $-$ parce que *moins plus* indique la négation du *plus*. On voit donc clairement que le produit de la multiplication doit toujours être $+$ quand les signes sont les mêmes, & $-$ lorsqu'ils sont différens.

Corollaire.

21. Si l'on multiplie $-a$ par $+b$, le produit est $-ab$; donc si $-ab$ est divisé par $+b$, le quotient doit être $-a$. Mais si l'on divisoit $-ab$ par $-a$, le quotient seroit $+b$. D'où, on doit conclure que la règle (*le produit des mêmes signes est $+$, & celui des signes différens est $-$*) a la même force dans la Division que dans la Multiplication.

Problème IV.

22. Diviser une grandeur littérale par une autre, soit qu'elles ayent le même signe ou non.

Solution.

Si l'une des deux grandeurs se peut effectivement diviser par l'autre, la division se fait comme dans l'Arithmétique (§. 51.) en observant toutefois ce que nous avons dit du changement des signes.

Si la Soustraction ne peut se faire, on s'en tiendra à ce que nous avons prescrit. (§. 14. & suiv.)

E X E M P L E.

$$\begin{array}{r}
 a-b-d \) \ aa-bb-2ad+dd \ (a+b-d \\
 \underline{aa-ab-ad} \\
 a-b-d \) \ ab-bb-ad+dd \\
 \underline{ab-bb-bd} \\
 a-b-d \) \ bd-ad+dd \\
 \underline{-ad+bd+dd} \\
 \hline
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array}$$

Remarque premiere.

23. Les lettres n'ayant pas comme les chiffres une valeur déterminée, il n'est pas nécessaire de garder l'ordre & l'arrangement que nous avons marqué dans l'Arithmétique pour les nombres, que l'on doit partager en tranches. On tire le quotient de quelque nombre que l'on veut. On n'est pas non plus obligé à observer cette loi, quand il s'agit de faire la Soustraction du produit du diviseur multiplié par le quotient.

Remarque seconde.

1°. Lorsque vous voulez faire la division de quelques grandeurs algébriques, écrivez le dividende à côté du diviseur, en les séparant par un petit arc, comme dans l'exemple cy-dessus, & vous mettez le quotient à l'autre bout en le séparant aussi par un petit arc.

2°. Effacez du dividende & du diviseur les grandeurs qui leur sont communes en même nom-

bré de fois de part & d'autre ; c'est une regle qu'il faut observer pour abreger les expressions ; ainsi au lieu de $\frac{abc}{abd}$ on écrira seulement $\frac{c}{d}$ au lieu de

$\frac{aabbccdef}{aabbcc}$ on écrira $d f$, parce que le quotient multiplié par le diviseur donnera dans le premier exemple abc , & dans le second, toutes les lettres du dividende.

S'il y avoit des nombres à gauche du dividende & du diviseur, on divise ces nombres à la façon ordinaire des nombres, & l'on met le quotient à la gauche du quotient littéral. Par exemple, pour abreger l'expression $\frac{6aabbcd}{3abcd}$ on diviserait 6 par 3, ce qui donne 2, & l'on écrirait au quotient $2ab$.

Mais si la division des chiffres ne peut se faire on les laisseroit subsister, en faisant pourtant la réduction ordinaire. On écrirait donc $\frac{7aab}{3ab}$, au lieu de $\frac{7aaab}{3a}$, &c.

3°. Multipliez le quotient par le diviseur, & ôtez le produit des grandeurs semblables. S'il reste ensuite des grandeurs communes au dividende & au diviseur, recommencez la même opération sur les grandeurs suivantes du dividende que vous abaisserez : s'il n'y en a point, écrivez le reste à part, & le diviseur à gauche.

Soit donné, par exemple, $aa + 2ab + ac + bb + bc + ad + bd + cd$ par $a + b + c$: j'écris ainsi le dividende & le diviseur comme dans l'exemple précédent.

$a + b$

$$\begin{array}{r} a+b+c \quad aa+2ab+ac+bb+bc+ad+bd+cd \quad (a+b+d) \\ \hline a+b+c \quad + \quad ab \quad + \quad bb+bc \\ \hline \quad \quad \quad + \quad ad+bd+cd \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \end{array}$$

Je dis ensuite, aa divisé par $+a$ donne a au quotient, je multiplie les termes $a+b+c$ du diviseur par le quotient, & j'ai aa pour produit, qui retranché de aa du dividende, il ne reste rien. Puis a par $+b$ donne ab , & de $+2ab$ retranchant ab , il reste ab que j'écris au-dessous, en mettant un point sur deux aa , pour marquer qu'ils ont été divisés : (ce qui doit toujours être observé) a par $+c$ donne $+ac$, & de $+ac$ ôtant $+ac$, il ne reste rien.

J'abaisse les termes $bb + bc$ du dividende, & j'écris le diviseur à gauche, puis je dis $+ab$ divisé par a donne au quotient $+b$, puis multipliant ce quotient par le diviseur, & retranchant le produit des termes $ab + bb + bc$, il ne reste rien.

J'abaisse les trois derniers termes $ad + bd + cd$, & mettant le diviseur à gauche, j'opère comme ci-dessus, & je trouve au quotient $+d$, & achevant le reste de la même manière, il ne me reste rien. Ainsi le quotient total est $a + b + d$.

Il arrive quelquefois que la division semble ne pouvoir pas se faire, parce qu'il manque au dividende des termes qui contiennent quelqu'un des termes du diviseur, lorsqu'il se trouve multiplié par le quotient. Il faut dans ce cas, donner une fois au dividende la grandeur qui lui manque sous le signe $+$ & une autre fois sous le signe $-$, ce qui est la même chose que si on ne lui donnoit rien, parce que le second détruit totalement le premier.

D E F I N I T I O N I V .

24. On nomme *puissance* une grandeur prise en elle-même. Le produit de cette grandeur multipliée par elle-même, est la *seconde puissance* ou son *quarré*. On appelle *troisième degré* ou *troisième puissance* ou *le cube de la première*, la seconde puissance multipliée par la première. La troisième multipliée par la première se nomme *quatrième puissance*, ou quatrième degré. La quatrième multipliée encore par la première se nomme *cinquième degré* ou *puissance*, &c. ce que l'on peut continuer jusqu'à l'infini. Enfin la première grandeur qu'on nomme aussi premier degré, est la racine de toutes ses puissances, c'est-à-dire, *a* est la racine quarrée de sa seconde puissance, ou de son quarré *aa*; il est la racine troisième de sa troisième puissance, ou de son cube *aaa*; la racine quatrième de sa quatrième puissance *aaaa*, &c.

Les grandeurs complexes prennent leurs différens noms de la quantité des termes qui les composent. En ont-elles seulement deux, on les nomme *binomes*, si elles en ont trois on les nomme *trinomes*, & *quatinomes* quand elles en ont quatre, &c. mais en général on les nomme *multinomes*. $a + b$ est un binome; $c + d + e$ est un trinome, &c.

H y p o t h è s e V I I .

25. On indique ordinairement le degré d'une puissance, ou la dignité à laquelle est élevée une quantité, par un petit chiffre placé à droite au haut de la lettre qui exprime cette grandeur ou cette quantité, comme x^1, x^2, x^3, x^4, x^5 . Ainsi *aa* se marquera $a^2, aaa, a^3, aaaa, a^4$. *bb, b^2, bbb, b^3*, & telle autre quantité ou grandeur que

ce soit. Mais si une grandeur est élevée à un degré indéterminé, comme feroit le centième, le millième, ou celui que l'on veut, au lieu de chiffre on met une petite lettre de l'alphabet, comme x^m , a^n , b^n , &c. Les chiffres ou les lettres ainsi placées se nomment les *Exposans* de la puissance ou des degrés de cette grandeur.

Corollaire I.

26. Si quelqu'un veut multiplier une puissance par une autre puissance de même grandeur, il faut dans ce cas-là ajouter les exposans aux exposans

EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} x^3 \\ x^4 \\ \hline x^7 \end{array} \quad \begin{array}{r} y^m \\ y^n \\ \hline y^{m+n} \end{array} \quad \begin{array}{r} x^m \\ x^r \\ \hline x^{m+r} \end{array} \quad \begin{array}{r} x^n \\ x^n \\ \hline x^{2n} \end{array}$$

Corollaire II.

27. Mais lorsqu'on divise une puissance par une autre, il faut soustraire l'exposant du diviseur de celui du dividende.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} x^7 \\ x^4 \\ \hline x^3 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^7 \\ x^3 \\ \hline x^4 \end{array} \quad \begin{array}{r} y^{m+n} \\ y^n \\ \hline y^m \end{array} \quad \begin{array}{r} y^m \\ y^n \\ \hline y^{m-n} \end{array}$$

Corollaire III.

28. Lorsqu'enfin vous voulez élever une grandeur donnée à une puissance plus grande que celle qu'elle a, multipliez l'exposant de la grandeur donnée par celui de la puissance à laquelle vous voulez l'élever,

E X E M P L E.

La grandeur x est élevée au troisième degré ou puissance, & vous voulez l'élever à la quatrième, multipliez les deux exposans l'un par l'autre & vous aurez x^{12} ; de même x^m élevée à x^n , vous aurez x^{mn} .

Remarque.

29. La raison en est évidente; car il faut ajouter l'exposant 3 quatre fois à lui-même (§. 26.) ce qui se fait en le multipliant par 4 (§. 13. Arithm.)

Corollaire IV.

30. Si l'on veut donc extraire la racine d'une puissance, c'est-à-dire, la quantité d'où la puissance a pris son origine par la multiplication faite de cette même quantité par elle-même (§. 74, 75, Arithm.) & (§. 25, Algeb.) il faut diviser l'exposant de la puissance par l'exposant de la racine. On demande par exemple la racine quarrée de x^{12} : divisez ^{12} par ^{2} , vous aurez x^6 ; & la racine ^{n} de x^n est x^1 ; de même la racine cubique de a^3 fera $a^1 = a$.

Remarque.

31. Il faut donner une grande attention à ce que nous venons d'indiquer sur les racines, parce qu'elle servira beaucoup pour comprendre ce que nous dirons dans la suite.

Hypothèse VIII.

32. Quand on ne peut extraire la racine des nombres ou des lettres qui expriment une grandeur,

on écrit à gauche de cette grandeur le signe $\sqrt{}$, qu'on nomme le *signe radical*, & l'on met au-dessus le nombre qui marque le degré de cette racine; mais si la racine est quarrée, on se contente de mettre le signe $\sqrt{}$ sans exposant; par exemple, la racine cubique de x s'écrit ainsi $\sqrt[3]{x}$. La racine cinquième de x s'écrit $\sqrt[5]{x}$, & la racine quarrée $\sqrt{x}$, ou simplement $\sqrt{x}$.

$\sqrt[3]{b}$ est la racine cubique de b ; $\sqrt[4]{ac}$ est la quatrième racine de ac .

Corollaire.

33. On peut se servir de cette formule au lieu de l'autre, si on la trouve plus commode $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ (§. 30.)

Remarque.

On trouve souvent dans les calculs algébriques; des grandeurs littérales qui n'ont que des exposans négatifs, comme a^{-3} , a^{-4} . Cela vient de ce que dans la division des grandeurs qui ont des exposans positifs, comme b^3 , b^4 , &c. par d'autres grandeurs semblables qui ont des exposans positifs; il arrive quelque fois que l'exposant du diviseur est plus grand que l'exposant du dividende; & comme selon le corollaire (§. 27.) on doit soustraire l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende; on aura par exemple $\frac{b^3}{b^4} = b^{3-4} = b^{-1}$. Il faut encore

remarquer que $b^{-2} = \frac{1}{b^2}$. Car suivant ce que nous avons dit art. 2. de la remarque seconde du (§. 23.) on doit effacer en même quantité les grandeurs semblables qui se trouvent dans le diviseur & dans le dividende; ainsi dans l'Exemple suivant

$\frac{b^3}{b^3} = \frac{bbb}{bbbbb} = \frac{1}{bb} = \frac{1}{b^2}$: mais par le (§. 27.) on aura $\frac{b^3}{b^3} = b^{3-3} = b^{-2}$; donc $b^{-2} = \frac{1}{b^2}$. Il s'enfuit de-là , que toute grandeur qui a un exposant négatif, comme c^{-3} , c^{-7} , peut être marquée ainsi : $\frac{1}{c^3}$, $\frac{1}{c^7}$, & par conséquent $\frac{1}{c^3}$, $\frac{1}{c^7} = c^{-3}$, c^{-7} .

DEFINITION V.

34. Les quantités ou grandeurs desquelles on ne peut extraire exactement la racine , se nomment quantités ou grandeurs *irrationnelles* ; si ce sont des nombres , on les nomme *nombres irrationnels* , comme $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{6}$.

DEFINITION VI.

35. L'*Equation* est une double expression d'une quantité ou d'une grandeur par des termes différens ; comme $2 + 3 = 1 + 4$. où vous voyez que 3 ajoutés à 2 font la somme de 5 , aussi bien que 4 ajoutés à 1.

Problème V.

36. Résoudre par l'algèbre un problème proposé.

Règle.

1°. Distinguez les grandeurs ou quantités proposées & connues de celles que vous cherchez ; les connues par les premières lettres de l'alphabet a, b, c, d , &c. & les inconnues par les dernières x, y, z . (§. 5.)

2°. Cherchez autant d'équations qu'il se trouve de grandeurs inconnues : si cela ne peut se faire ; c'est une marque que le *problème* n'est pas *déterminé*, & que l'on peut prendre à volonté une ou plusieurs des grandeurs que l'on cherche. Pour les équations, on les trouve dans l'énonciation même du problème, sinon il faut les extraire de l'expression même, ou des circonstances du problème à l'aide des théorèmes sur l'égalité.

3°. Comme dans l'équation les quantités connues sont mêlées avec les inconnues, il faut les séparer, de manière que d'un côté on n'ait qu'une seule quantité inconnue, & de l'autre toutes celles qui sont bien connues. Pour en venir à bout, on ajoutera les quantités soustraites; on soustraira celles qui sont ajoutées; on divisera celles qui sont multipliées; on multipliera celles qui sont divisées; on extraira la racine des puissances; on élèvera les racines aux puissances, afin de conserver toujours par cette opération une même égalité. (§. 24, 25, 26, 27, Arithm.)

Problème VI.

37. Ayant la somme de deux quantités avec leur différence, trouver ces quantités.

Solution.

Soit la somme $= a$ la plus grande quantité $= y$
 Et la différence $= b$ Et la plus petite $= x$
 Selon la condition du Problème on aura $x + y = a$ (§. 9. Arit.) $y - x = b$ (§. 12. Arithm.)
 $x = x$ soit soustrait $x = x$ soit ajouté y
 $= a - x$ $y = b + x$

G iiij

Donc $a - x = b + x$ (§. 22. Arithm.)

$x =$ x ajouté.

$$a = b + 2x$$

$b = b$ soustrait

$$a - b = 2x$$

$$(2 \text{ Divif.})$$

$$a - b = x$$

2

Ainsi la valeur de x substituée à celle de $y = b + x$; on a $y = b + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Règle.

Soustrayez de la somme a la différence b , & divisez le reste par 2 : le quotient est la plus petite quantité x . Ajoutez la différence à la somme, & la moitié fera la plus grande quantité y .

Soit pour Exemple ,

$$a=30, b=8 \text{ on a } (a-b):2=(30-8):2=12:2=6 \text{ \& } (a+b):2=(30+8):2=38:2=19.$$

Remarque.

38. De cette dernière équation on pourroit former une règle générale pour résoudre le Problème dans tous les cas qu'on peut le proposer, si l'on substituoit aux lettres de l'algèbre les noms des choses exprimées par ces lettres, & si au lieu des signes on faisoit les opérations d'Arithmétique qu'ils représentent : mais comme nous ne nous sommes proposés que de faire un abrégé, pour éviter d'être trop diffus, nous ne mettons point de règles, à moins que des circonstances particulières ne l'exigent. Je le fais d'autant plus volontiers qu'on a beaucoup plutôt résolu un exemple donné par les

chiffres quand on les substitue aux lettres, qu'en se servant d'une règle pour opérer par ces mêmes lettres. D'ailleurs, on trouve souvent dans ces équations, où les quantités connues & inconnues sont mêlées, divers Théorèmes très-utiles.

Dans l'équation, par Exemple, $a - b = 2x$, on voit le Théorème suivant.

Si de la somme de deux quantités on soustrait leur différence, ce qui reste est le double de la plus petite de ces quantités.

E X E M P L E.

6 & 11 font 17 : je soustrais de 17 la différence de 6 à 11 qui est 5, il reste 12, la moitié de 12 est 6, qui est la plus petite des deux quantités proposées.

Problème VII.

39. Trouver un nombre dont la moitié avec la troisième & la quatrième partie, surpasseront ce nombre d'une seule unité.

Solution.

Soit le nombre cherché x , il sera ainsi par les conditions du Problème.

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$$

C'est-à-dire, $(12x + 8x + 6x) : 24 = \frac{16}{24}x = x + 1$ (§. 65 Arit.)

$$\text{Multip. par } 24 \quad 26x = 24x + 24$$

$$24x = 24x \text{ soust.}$$

$$2x = 24$$

$$\text{—————} (2 \text{ Divif.}$$

$$x = 12$$

Preuve.

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 6 + 4 + 3 = 13 = 12 + 1$$

On ne trouve donc aucun autre nombre que 12 ;
qui puisse être celui que l'on cherche.

Problème VIII.

40. Ayant la somme de deux nombres & le produit de l'un par l'autre , trouver ces mêmes nombres.

Solution.

Soit la somme $= a$ la demi différence $= x$
Le produit $= b$ le plus grand nombre $= \frac{1}{2}a + x$ { §. 36.
Le plus petit $= \frac{1}{2}a - x$

Donc par les conditions du Problème

$$\frac{1}{4}aa - xx = b$$

$xx = xx$ ajout.

$$\frac{1}{4}aa = b + xx$$

$$b = b \text{ soustr.}$$

$$\frac{1}{4}aa - b = xx$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}aa - b} = x$$

Soit $a = 14$, $b = 48$: on aura $\sqrt{\frac{1}{4}aa - b} =$
 $\sqrt{(49 - 48)} = 1$. Donc le plus grand nombre
fera $\frac{1}{2}a + x = 7 + 1$; & le plus petit $\frac{1}{2}a - x$
 $= 7 - 1 = 6$.

Problème IX.

41. Ayant la somme de deux quantités & la différence de leurs quarrés , trouver ces deux quantités.

Solution.

Soit la somme $= a$ demi diff.

La diff. des quar. $= b$ des quantit. $= y$

La plus grande quantité fera $= \frac{1}{2}a + y$ (§. 36.)

La plus petite

$= \frac{1}{2}a - y$

Le $\square$ de la plus grande $= \frac{1}{4}aa + ay + yy$ — De la plus petite $= \frac{1}{4}aa - ay + yy$ La différ. des $\square b = 2ay$

2a Divif.

$$\frac{b}{2a} = y$$

Soit $b = 40$, $a = 10$: on aura $y = \frac{40}{20} = 2$; & par conséquent un des deux nombres $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$; l'autre $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Problème X.

42. Ayant la somme de deux quantités , & la somme de leurs quarrés , trouver l'une & l'autre quantité.

Solution.

Soit la 1^{re} somme $= a$ demi différ.la 2^e. $= b$ des quantités $= y$ La plus grande quantité sera $= \frac{1}{2}a + y$ (§. 36.)La plus petite $= \frac{1}{2}a - y$ Le $\square$ de la plus grande $= \frac{1}{4}aa + ay + yy$ Celui de la plus petite $= \frac{1}{4}aa - ay + yy$ Somme des $\square b = \frac{1}{2}aa + 2yy$ Par conséquent $b - \frac{1}{2}aa = 2yy$

$$\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa = yy \text{ \& } y = \sqrt{\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2}$$

Soit $a = 10$, $b = 58$: on aura $\sqrt{\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa} = \sqrt{29 - 25} = \sqrt{4} = 2$. Donc $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$, & $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Problème XI.

43. Deux Voyageurs ont pris la même route, le

premier est parti tel jour & fait tant de lieues par jour. Le second est parti tel jour & parcourt tant de chemin dans un jour ; combien faudra-t-il de tems au second pour atteindre le premier ?

Solution.

Somme des lieues que fait le premier dans un jour, $= a$, le second $= b$, tems depuis le départ $= c$, tems cherché $= x$.

Le chemin qu'a fait le premier pendant le tems donné fera $= a c$, pendant le tems que l'on cherche $= a x$. Le chemin qu'aura parcouru le second pendant le tems cherché fera $= b x$ (§. 85. Arithm.) c'est pourquoi selon la condition du Problème.

$$ac + ax = bx$$

$$ax = ax \text{ soustr.}$$

$$ac = bx - ax = (b - a)x$$

$$\text{-----} (b - a \text{ Divif.})$$

$$ac : b - a = x$$

Soit $a = 6$, $b = 8$, $c = 4$: on aura $x = 24$:
 $(8 - 6) = \frac{24}{2} = 12$.

Problème XII.

44. Sachant l'espace de chemin qu'un voyageur parcourt dans un jour, avec le tems qui s'est écoulé depuis son départ ; trouver l'espace de chemin qu'un second voyageur devra parcourir dans un jour, pour atteindre l'autre au bout d'un tems marqué.

Solution.

Soit le chemin que le premier fait par jour
 $= a$, le chemin que fait le second $= x$,
 $= b$ tems écoulé depuis le départ du 1^{er}.
 tems que l'on a marqué au 2^e $= c$,

Selon l'expression du Problème, on aura comme dans le précédent.

$$\frac{ab + ac = cx}{c} \text{ Divif.}$$

$$\frac{ab}{c} + a = x$$

Soit $a=6$, $b=4$, $c=12$: on aura $x = \frac{24}{12} + 6 = 2 + 6 = 8$.

Problème XIII.

45. Connoissant la distance de deux villes, & le chemin que font dans un jour deux voyageurs, qui en partent à la même heure ; trouver le tems où ils se rencontreront.

Solution.

Distance des lieux $= a$ chem. d'un j. du 1^{er}. $= b$
 Tems de leur rencontre $= x$ du 2^e. $= c$

Le chemin que le premier aura fait pendant le tems x sera $= bx$, le chemin qu'aura fait le second dans le même tems x sera $= cx$ (§. 85. Arith.) & comme l'espace de chemin que l'un a fait, ajouté à celui de l'autre, remplissent la distance des lieux d'où ils sont partis : on aura

$$\frac{bx + cx}{(b + c)} = a$$

C'est-à-dire, $(b + c) x = a$

$$x = a : (b + c)$$

Soit $a=120$, $b=6$, $c=4$: on aura $x = 120 : (6 + 4) = 120 : 10 = 12$.

Ce sera donc le douzième jour qu'ils se rencontreront.

Problème XIV.

46. Je vends à un tel prix telle mesure de vin ; combien faudra-t-il que j'y mêle d'eau pour le vendre à un tel prix plus bas ?

Solution.

Soit le plus haut prix $= a$, quantité d'eau $= x$

Le plus bas $= b$

Quantité de mesure $= 1$

Donc le prix de la quantité $1 + x$, $= b + bx$.
Car comme 1 est à b , de même $1 + x$ est à $b + bx$
(§. 85. Arith.) & comme l'eau est supposée ne rien coûter, nous disons

$$b + bx = a \text{ (§. 20. Arith.)}$$

$$bx = a - b$$

$$x = (a - b) : b$$

Soit $a = 16$, $b = 10$: on aura $x = (16 - 10) : 10 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Problème XV.

47. Le prix d'un vin excellent, & celui d'un vin moins bon une fois posé, déterminer la quantité qu'il faut mêler de ce dernier avec l'autre pour faire un vin qu'on puisse vendre à un prix moyen.

Solution.

Soit le prix du meilleur $= a$ Quantité du vin commun qu'il faut mêler avec le bon $= x$

Du plus commun $= b$ Son prix fera $= bx$

Le prix moyen $= c$ Quantité du bon qu'il faut mêler avec le commun $= 1 - x$

Nombre des mesures $= 1$ Son prix fera $= a - ax$

D' A L G E' B R E. 111
C'est pourquoi selon la condition du Problème

$$\begin{array}{rcl}
 a - ax + bx & = & c \text{ (§. 20. Arith.)} \\
 + ax & = & ax \text{ ajout.} \\
 \hline
 a + bx & = & c + ax \\
 bx & = & bx \text{ soustr.} \\
 \hline
 a & = & c + ax - bx \\
 c & = & c \text{ soustr.} \\
 \hline
 a - c & = & ax - bx = (a - b)x \\
 \hline
 \frac{a - c}{a - b} & = & x
 \end{array}$$

Soit $a = 16$, $b = 10$, $c = 12$: on aura $x = (16 - 12) : (16 - 10) = 4 : 6 = \frac{2}{3}$.

Il faut donc en prendre $\frac{2}{3}$ du commun, & $\frac{1}{3}$ du meilleur, pour faire le mélange que l'on cherche.

DEFINITION VII.

48. On appelle *Racine Binome* celle qui est composée de deux parties, comme $a + b$; on appelle *Trinome*, celle de trois, comme $a + b + c$; *quadrinome*, celle de quatre, comme $a + b + c + d$: en général on donne le nom de *Multinome* à toutes les racines qui ont plus de deux termes.

Problème XVI.

49. Trouver la nature d'un quarré ou d'une seconde puissance, dont la racine est binome.

Solution.

On cherche comment se forme le quarré d'une racine binome (§. 4. Méthod. Mathem.) Multipliez

donc la racine binome par elle-même, le produit indiquera de quelles parties est composé le quarré, & comment les parties du quarré se forment des parties de la racine.

E X E M P L E.

$$\begin{array}{r}
 a+b \\
 a+b \\
 \hline
 -\quad ab+bb \\
 aa+ab \\
 \hline
 aa+2ab+bb \text{ quarré de la racine binome.}
 \end{array}$$

Théorème.

Le quarré d'une racine binome contient les quarrés de chaque partie (a^2 & b^2) & le produit ($2ab$) pris deux fois d'une partie ($2a$) multipliée par l'autre (b)

D E F I N I T I O N V I I I.

§ 0. L'équation affectée sous le quarré est celle où $xx + ax = +b$.

Problème XVII.

§ 1. Résoudre une équation affectée sous le quarré.

Solution.

Prenez x dans l'équation $xx + ax = +bb$, pour une partie de la racine binome; puis a , quantité connue du second membre, fera le double de la racine de l'autre partie: & ainsi $\frac{1}{2}a$ fera l'autre partie de la racine: il s'ensuit donc que les deux nombres $xx + ax$ feroient un quarré parfait, s'il n'y manquoit pas le quarré de la partie $\frac{1}{2}a$, ou $\frac{1}{4}aa$.

Si

Si l'on ajoute donc ce carré de part & d'autre, on pourra extraire la racine carrée, & il sera facile de résoudre l'équation proposée.

$$\begin{array}{rcl}
 xx. & ax = b^2 & \\
 & \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa & \\
 \hline
 xx. & ax + \frac{1}{4}aa = bb + \frac{1}{4}aa. & \\
 \hline
 x. & \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa.bb} & \\
 \hline
 x = & \frac{1}{2}a. \sqrt{\frac{1}{4}aa.bb} &
 \end{array}$$

Remarque.

52. J'ai mis des points (.) au lieu des signes + & — afin de n'être pas obligé de distinguer plusieurs cas. On aura lieu de voir souvent l'usage de cette règle dans la suite, il suffit actuellement de l'éclaircir par le Problème suivant.

Problème XVIII.

53. Ayant le produit de deux grandeurs avec leur différence, trouver ces mêmes grandeurs.

Solution.

Soit le produit $= a$, la grandeur la plus grande $= x$
 La différence $= b$ la plus petite $= y$

On aura selon la condition du Problème ;

$$\begin{array}{rcl}
 a = xy & b = x - y & \\
 a : y = x & b + y = x &
 \end{array}$$

Donc $a: y = b + y$ (§. 22. Arith.)

$\frac{a}{b} = \frac{b+y}{b}$ y multip.

$$a = by + yy$$

$$\frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb$$

$$a + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb + by + yy$$

$$\sqrt{a + \frac{1}{4}bb} = \frac{1}{2}b + y$$

$$\sqrt{a + \frac{1}{4}bb} - \frac{1}{2}b = y.$$

Soit $a = 40$, $b = 3$, on aura $y = \sqrt{40 + \frac{9}{4}}$
 $= \frac{1}{2}\sqrt{169} = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$; & par
 conséquent $x = 8$.

Problème XIX.

54. Déterminer la différence de deux quarrés ,
 dont les racines ne diffèrent que d'une unité.

Soit une racine $= n$, & l'autre $= n + 1$

Le $\square$ de la grande $= nn$, $+ 2n + 1$

De la petite $= nn$

Différence $= 2n + 1$.

Solution.

Tout nombre pris deux fois donne un nombre
 pair. Le nombre pair ne diffère de l'impair que
 d'une unité, le nombre impair égal à la somme des
 racines est donc précisément la différence de deux
 quarrés qui ne diffèrent que d'une unité.

Soient les racines 8 & 9 : la différence des deux
 quarrés fera $17 = 8 + 9$.

Problème XX.

55. Déterminer la différence de deux cubes ,
 dont les racines ne diffèrent que d'une unité.

Solution.

Soient les racines n & $n+1$: $\left\{ \begin{array}{l} \text{le plus grand} = n^3 + 3nn + 3n + 1 \\ \text{le plus petit} = n^3 \end{array} \right.$

Le cube sera $\quad \quad \quad$
La différence $= \quad \quad \quad 3nn + 3n + 1$

C'est-à-dire, $nn + 2n + 1 + 2nn + n = n^2 + 1 + 2n^2 + n$.

La différence que l'on cherche est donc la somme du carré de la plus grande racine, du carré de la plus petite pris deux fois, & de la petite racine elle-même.

E X E M P L E.

Soient les racines 8 & 9, la différence des cubes sera $217 = 81 + 128 + 8 = 9^2 + 2 \cdot 8^2 + 8$.

Problème XXI.

56. Déterminer la somme du premier & du dernier terme, dans la progression arithmétique.

Solution.

Soit le premier terme a , la différence des termes d : on aura la progression (§. 56. Arithm.)

$$\begin{array}{r} a. a+d. a+2d. a+3d. a+4d. a+5d, \&c. \\ \hline \frac{a+4d.}{2a+5d} \quad \frac{a+2d}{2a+5d} \quad \frac{a}{2a+5d} \end{array}$$

De même,

$$\begin{array}{r} a. a+d. a+2d. a+3d. a+4d \\ \hline \frac{a+3d.}{2a+4d} \quad \frac{a+2d}{2a+4d} \quad \frac{a+3d}{2a+4d} \quad \frac{a+4d}{2a+4d} \end{array}$$

Théorème.

Dans toute progression arithmétique, la somme

H ij

des extrêmes est égale à la somme des moyens, pourvu qu'ils soient à égale distance des extrêmes. La somme de ces extrêmes est aussi égale au double du moyen quand le nombre est impair.

E X E M P L E.

$$\begin{array}{ccccccc}
 3. & 6. & 9. & 12. & 15. & 18. & 21. \\
 & & & 12 & 9 & 6 & 3 \\
 \hline
 & & & 24 & = 24 & = 24 & = 24.
 \end{array}$$

Corollaire.

57. On aura donc la somme de la progression arithmétique, si l'on multiplie la somme des extrêmes par le nombre qui fait la moitié des termes.

Problème XXII.

58. Ayant le premier terme, la différence des termes, & la somme de la progression arithmétique, trouver le nombre & le dernier des termes.

Solution.

Soit le premier terme $= a$, le dernier $= y$

La différence $= d$, leur nombre x

La somme $= c$, on aura (§. 57.)

$$\frac{1}{2} x (+y) = c, a + x - 1 | d = y$$

2. multip.

$$ax + xy = 2c$$

$$xy = 2c - ax$$

x Divif.

$$y - (2c - ax) : x \text{ donc (§. 22 Arith.)}$$

$$(2c - ax) : x = a + dx - d$$

x Multip.

$$2c - ax = dxx + ax - dx$$

d Divif.

$$2c = dxx + 2ax - dx$$

$$2c : d = xx + \frac{(2a - d)}{d}x$$

C'est-à-dire, si l'on fait $\frac{(2a - d)}{d} = m$

$$2c : d = xx + mx$$

$$\frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}mm \text{ (§. 51.)}$$

$$2c : d + \frac{1}{4}m^2 = xx + mx + \frac{1}{4}mm$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}mm + 2c : d} = x + \frac{1}{2}m$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}mm + 2c : d} - \frac{1}{2}m = x.$$

Soit $a = 2$, $d = 3$, $c = 57$, on aura $m = (4 - 3) : 3 = \frac{1}{3}$, donc $x = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{114}{3} - \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{1369}{36} - \frac{1}{6}} = \frac{37}{6} - \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$. Conséquemment $y = 2 + 5.3 = 2 + 15 = 17$.

Problème XXIII.

59. Trouver combien de fois on peut changer les termes d'une proportion géométrique, sans détruire cette proportion.

Solution.

On n'a qu'à changer les termes autant de fois qu'on le peut; comparer entr'elles leurs sommes, leurs différences, &c. on verra pour lors quels sont les cas où la proportion subsiste, pourvu que l'on fasse attention, si dans les deux rapports l'exposant demeure toujours le même, ou non. (§. 53. Arith.)

Soit donc $a : ma = b : mb$. Je veux garder la proportion de ces termes, en les changeant de place. Ces changemens prennent des noms différens, selon la maniere dont ils se font. Pour éviter la répétition, je me contenterai de mettre ici les différens noms à la gauche des termes, dont l'arrangement les produit. Ceux qui en voudront sçavoir l'expli-

H iij

cation, auront recours à la remarque du (§. 83: Arithm.)

Soit donc $a : ma = b : mb$ à changer, on aura

$$\text{alternando } a : b = ma : mb$$

$$\text{invertendo } ma : a = mb : b$$

$$\text{convertendo } a + ma : a = b + mb : b$$

$$\text{componendo } a + ma : ma = b + mb : mb$$

$$\text{dividendo } ma - a : a = mb - b : b$$

$$ma - a : ma = m - b : mb$$

$$\text{Or } aa : mmaa = bb : mmbb$$

$$\text{Ou généralement } a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$$

De même

$$a : mac = b : mbc$$

$$a : \frac{ma}{c} = b : \frac{mb}{c}$$

$$ac : ma = bc : mb$$

$$\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$$

$$ac : mac = b : mb$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$$

$$ac : mac = bd : mbd$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$$

$$\text{Soit selon l'ordre } a : ma = b : mb$$

$$\& ma : mna = mb : mnb$$

$$\text{on aura tout de même } a : mna = b : mnb$$

$$\text{Soit sans ordre } a : ma = b : mb$$

$$\& ma : mna = \frac{b}{n} : \frac{b}{n}$$

$$\text{on aura aussi } a : mna = \frac{b}{n} : \frac{mb}{n}$$

Remarque.

60. On trouve sans peine, dans les arrangements différens des termes, dix-huit théorèmes, qu'il faut bien s'inculquer dans l'esprit, quans on veut étudier sérieusement les livres de Mathématique, ou trouver de son propre fond les vérités que les Mathématiques renferment; car la proportion géométrique est à proprement parler, l'ame des sciences qui font le corps des Mathématiques. Je regarde comme superflus d'énoncer ici divers Théorèmes, parce qu'il n'est personne qui avec un peu d'attention, ne puisse les former quand il jugera à propos. Par exemple on énoncera le premier Théorème de la manière suivante.

I.

Quatre grandeurs étant en proportion géométrique, la première sera à la troisième, comme la seconde à la quatrième.

II.

Lorsque dans une proportion géométrique, on multiplie le premier & le troisième terme par la même grandeur, les termes ne laisseront pas que d'être en proportion. Ainsi a & b étant multipliés par c , les produits ac & bc sont en même raison que a & b .

Problème XXIV.

61. Trouver la manière de changer deux grandeurs, de façon que leur premier rapport demeure le même.

Solution.

Soient les deux quantités a & ma , ayant 1 pour rapport à m ; on aura

$$\begin{array}{ll}
 \text{I } \frac{a:ma}{c \quad c} & \text{II } \frac{a:ma}{c \quad c} \\
 ac : mac = a : ma & \frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = a : ma \\
 = 1 : m & 1 : m \\
 \\
 \text{III } \frac{a:ma}{b:mb} & \text{IV } \frac{a:ma}{b:mb} \\
 a - b : ma - mb = a : ma & a + b : ma + mb = a : ma \\
 = b : mb & = b : mb \\
 = 1 : m & = 1 : m
 \end{array}$$

Théorème.

I. Si l'on multiplie deux grandeurs par une même troisième, les produits seront en même raison que les grandeurs.

II. Deux grandeurs a & b étant divisées par une même, comme c , les quotiens sont en même raison que les grandeurs.

III. Si les parties que l'on soustrait des grandeurs, sont en même raison que les grandeurs entières, les parties qui restent après la soustraction ont aussi le même rapport avec les grandeurs entières.

IV. Si les parties ajoutées aux grandeurs ont le même rapport entr'elles que les grandeurs auxquelles on les ajoute, leurs sommes seront aussi en même raison.

Problème XXV.

62. Déterminer le produit du premier terme

multiplié par le dernier dans une progression géométrique.

Solution.

Soit le premier terme a , l'exposant m ; ou aura la progression (§ 56. Arithm.)

$$\begin{array}{r} a. ma. m^2a. m^3a. m^4a. m^5a. m^6a. \\ m^5a \quad m^3a \quad m^6a \quad a \\ \hline m^6a = m^6a \quad m^6a = m^6a. \end{array}$$

Théorème.

Dans toute progression géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, qui de part & d'autre sont en même rapport avec les extrêmes; & si le nombre des termes est impair, le produit des extrêmes est égal au carré du moyen, & au produit des autres moyens, qui sont en même raison, que quand le nombre des termes est pair.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} 3. \quad 6. \quad 12. \quad 24. \quad 48. \quad 96. \\ \quad \quad 12 \quad \quad 6 \quad \quad 3 \\ \hline 288=288=288 \end{array}$$

EXEMPLE de la seconde partie du Théorème.

$$\begin{array}{r} 3. \quad 6. \quad 12. \quad 24. \quad 48. \quad 96. \quad 192. \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 3 \\ \hline 576 = 576 \end{array}$$

Problème XXVI.

63. Déterminer le quotient dans une division faite de la différence du premier & du dernier ter-

Corollaire.

64. Si l'on ajoute donc le dernier terme au quotient dont je viens de parler, on aura la somme de toute la progression géométrique.

DEFINITION IX.

65. On dit que trois ou quatre termes sont en *proportion harmonique*, lorsque la différence du premier & du second a une même raison avec la différence du second & du troisième, que le premier terme a avec le troisième. Ainsi ces trois nombres 60, 30, 20 font une proportion harmonique; car la différence de 60 à 30, qui est 30, a une même raison avec 10, différence de 30 à 20, que 60 avec 20.

Et dans le second cas, on dit que quatre grandeurs sont en *proportion harmonique* lorsque la différence de la première & de la seconde est à la différence de la troisième & de la quatrième, comme la première grandeur à la quatrième. Si dans le premier cas on continue les termes avec la même méthode, ce sera une *progression harmonique*.

Remarque.

Cette *proportion* qu'on nomme *harmonique* a pris son nom de ce que les Musiciens s'en servent dans leurs compositions, & en font beaucoup de cas. Elle est, pour ainsi dire, composée de la proportion arithmétique, & de la proportion géométrique, comme on le voit dans le raisonnement de la définition cy-dessus.

Problème XXVII.

66. Ayant deux grandeurs, en trouver une troi-

fième qui leur soit en proportion harmonique;

Solution.

Soit la première $= a$ la troisième $= x$

La seconde $= b$

On aura (§. 65.)

$$b - a : x - b = a : x$$

$$\hline ax - ab = bx - ax$$

$$\hline 2ax - bx = ab$$

$$\hline (2a - b) \text{ Divif.}$$

$$x = \frac{ab}{2a - b}$$

Soit $a = 10$, $b = 16$; on aura $x = 160 : (20 - 16) = 160 : 4 = 40$.

Corollaire I.

67. Si $2a = b$; on aura $x = ab : 0$; conséquemment $1 : 0 = x : ab$; & ainsi dans ce cas on ne sçauroit trouver un nombre qui soit en proportion harmonique, encore moins le trouvera-t-on, lorsque b fera plus grand que $2a$.

Corollaire II.

68. Si l'on prend la seconde grandeur pour la première, & la troisième pour la seconde, on trouvera de la même façon la quatrième, c'est pourquoi on propose le Problème suivant.

Problème XXVIII.

69. Ayant deux grandeurs, en trouver une moyenne, qui soit en proportion harmonique.

*Solution.*Soit la première $= a$ La troisième $= b$, la seconde $= x$

on aura (§. 53.)

$$x - a : b - x = a : b$$

$$bx - ab = ab - ax$$

$$ax + bx = 2ab$$

$$x = 2ab : (a + b)$$

Soit $a = 10$, $b = 40$, on aura $x = \frac{2 \times 10 \times 40}{10 + 40} = 16$.*Problème XXIX.*

70. Trois grandeurs étant données, en trouver une quatrième qui soit en proportion harmonique.

*Solution.*Soit la première grandeur $= a$ La seconde $= b$, la 4^e $= x$ La troisième $= c$

on aura (§. 65.)

$$b - a : x - c = a : x$$

$$bx - ax = ax - ac$$

$$ac = 2ax - bx$$

$$2a - b \text{ Divif.}$$

$$ac : (2a - b) = x$$

Soit $a = 6$, $b = 8$, $c = 12$, on aura $x = 72 : (12 - 8) = 72 : 4 = 18$.*Problème XXX.*

71. Trouver un cercle égal à la superficie d'un cylindre.

Solution.

Soit le diamètre du cylindre d , sa conférence p ; sa hauteur a ; on aura la superficie ap (§. 197. Géom.) Soit le diamètre du cercle x ; on aura d :
 $p = x : \frac{px}{d}$ (§. 129. Géom.) la circonférence du
 cercle est donc $\frac{px}{d}$, & sa superficie fera $\frac{pxx}{4d}$ (§. 134
 Géom.) donc

$$\begin{array}{l} \frac{px^2 : 4d = ap}{x^2 = 4ad} \\ x = \sqrt{4ad}, \text{ ou } \frac{1}{2}x = \sqrt{ad}. \end{array}$$

Théorème.

La superficie d'un cylindre est égale à un cercle, dont le rayon est moyen proportionnel entre le diamètre & la hauteur du cylindre.

Problème XXXI.

72. Connoissant la hauteur d'un cylindre égale au diamètre connu d'une boule, trouver le diamètre du cylindre.

Solution.

Soit la hauteur du cylindre a , le diamètre de la boule d , sa circonférence p , le diamètre du cylindre x ; on aura pour solidité de la boule $\frac{1}{6}p d^2$ (§. 208. Géom.) la circonférence du cylindre $px : d$

(§. 129. Géom.) Sa solidité $apx^2 : 4d$ (§. 197. Géom.) C'est pourquoi

$$\frac{\frac{1}{2}pd^3 = apx^2 : 4d}{\frac{4}{3}pd^3 = apx^2} \quad 4d \text{ Multip.}$$

$$\frac{\frac{4}{3}pd^3 = apx^2}{\frac{2}{3}d^3 = x^2} \quad ap \text{ Divif.}$$

$$\frac{2}{3}d^3 = x^2$$

Et par conséquent $3a : 2d = d^2 : x^2$.

Problème XXXII.

73. Ayant le diamètre & la hauteur d'un cône, trouver le diamètre d'un cylindre qui soit égal au cône en hauteur & en solidité.

Solution.

Soit le diamètre du cône d , sa hauteur a , le diamètre du cylindre x , le rapport du diamètre à la circonférence $d : p$; on aura pour la solidité du cône $\frac{1}{12}adp$ (§. 201. Géom.) la circonférence du cylindre $px : d$, & sa solidité $apx^2 : 4d$ (§. 197. Géom.) ainsi donc

$$\frac{\frac{1}{12}adp = apx^2 : 4d}{\frac{4}{12}ad^3p = apx^2} \quad 4d \text{ Multip.}$$

$$\frac{\frac{4}{12}ad^3p = apx^2}{\frac{1}{3}d^3 = x^2} \quad ap \text{ Divif.}$$

$$\frac{1}{3}d^3 = x^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}d^3} = x$$

x est donc le moyen proportionnel entre $\frac{1}{3}d$ & d .

Problème XXXIII.

74. Connoissant le diamètre & la hauteur d'un

cône , trouver le diamètre d'une boule qui lui soit égal.

Solution.

Soit le diamètre de la base d'un cône d , sa circonférence $= p$, sa hauteur a , le diamètre de la boule x ; on aura pour solidité du cône $\frac{1}{12} a d p$ (§. 201. Géom.) & la solidité de la boule $p x^3 : 6 d$ (§. 208. Géom.) De là

$$\begin{array}{r} \frac{1}{12} a d p = p x^3 : 6 d \\ \hline 6 d \text{ Multip.} \\ \frac{1}{12} a d^2 p = p x^3 \\ \hline p \text{ Divif.} \\ \frac{1}{12} a d^2 = x^3 \\ \hline \sqrt[3]{\frac{1}{12} a d^2} = x \end{array}$$

Problème XXXIV.

75. Expliquer la nature des équations:

Solution.

1°. Prenez autant de valeurs que vous voudrez de la grandeur inconnue , formez-en de simples équations , mais égales à zéro.

2°. Multipliez ces simples équations l'une par l'autre ; il en naîtra des équations plus grandes , dont l'examen manifestera les propriétés.

$$\begin{array}{rcl} \text{Soit } x = & 2 & x = a \\ & x = -3 & x = -b \\ & x = 4 & x = c \end{array}$$

On aura

$$\begin{array}{rcl} x - 2 = 0 & \text{I} & x - a = 0 \\ x + 3 = 0 & \text{II} & x + b = 0 \\ x - 4 = 0 & \text{III} & x - c = 0 \end{array}$$

Multipliez

Multipliez d'abord la première équation par la seconde, vous multipliez ensuite le produit par la troisième.

$$\begin{array}{r}
 x-2=0 \\
 x+3=0 \\
 \hline
 3x-6 \\
 x^2-2x \\
 \hline
 x^2+x-6=0 \\
 x-4=0 \\
 \hline
 -4x^2-4x+24 \\
 x^3+x^2-6x \\
 \hline
 x^3-3x^2-10x+24=10
 \end{array}$$

les racines sont -3 , $+4$ & $+2$. Le dernier membre dans la même équation est $+24=2$.

3. 4.

20. Il faut aussi observer qu'il y a autant de véritables racines dans une équation, qu'il s'y trouve de changemens de signes ; & autant de fausses qu'il y a de successions de ces mêmes signes.

EXEMPLE.

Dans l'équation quarrée $x^2+x-6=0$, il n'y qu'une succession de signe $++$ & un changement $+-$. Cette équation a deux racines, l'une vraie $+2$, l'autre fausse -3 . Dans l'équation cubique $x^3-3x^2-10x+24=0$. Il y a deux changemens de signes $+-$ & $-+$; une succession $---$. On y trouve aussi trois racines ; deux vraies $+2$ & $+4$, & une fausse -3 .

Problème XXXV.

76. Trouver toutes les racines *rationnelles* contenues dans une équation.

Solution.

Le dernier membre d'une équation étant le produit de toutes les racines (§. 5.) il faut le réduire en ses produisans, que vous substituerez successivement à x dans l'équation donnée : car dans tous les cas où les nombres positifs & négatifs se détruiront mutuellement, on y trouvera la valeur de x substituée.

Soit, par exemple $x^2-6x+8=0$. Le der-

D' A L G E' B R E.

131

Le premier membre 8 a pour produit 2 & 4. Qu'on mette donc $x = 2$, on aura

$$\begin{array}{r} x^2 = 4 \\ - 6x = - 12 \\ + 8 = + 8 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

2 est la véritable racine de l'équation. Qu'on mette donc aussi $x = 4$, on aura

$$\begin{array}{r} x^2 = 16 \\ - 6x = - 24 \\ + 8 = + 8 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

On aura donc aussi 4 pour l'autre racine véritable de l'équation.

Soit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$ les produits du dernier membre 15 sont 1, 3, 5 : si l'on substitue 1 à la place de x , on aura

$$\begin{array}{r} x^3 = 1 \\ - 3x^2 = - 3 \\ - 13x = - 13 \\ + 15 = + 15 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

1 est donc une des véritables racines.

Qu'on substitue ensuite 3 à x ; on aura

$$\begin{array}{r} x^3 = 27 \\ - 3x^2 = - 27 \\ - 13x = - 39 \\ + 15 = + 15 \\ \hline 0 = - 24 \end{array}$$

3 n'est donc pas une des véritables racines.

I ij

Qu'on substitue enfin 5 à x ; on aura

$$\begin{array}{r}
 x^3 = 125 \\
 - 3x^2 = -75 \\
 - 13x = -65 \\
 + 15 = +15 \\
 \hline
 0 = 0
 \end{array}$$

On voit par-là que 5 est l'autre véritable racine,

Autrement.

Les équations composées étant formées par la multiplication des simples, (§. 75) si quelque une des racines étoit rationnelle, l'équation pourra se diviser par une équation simple formée de x , & d'un des produisans du dernier membre ; essayons donc de faire cette division.

Soit l'équation proposée $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Les produisans du dernier membre sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 : d'où les simples équations $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 4 = 0$, $x - 6 = 0$, $x + 6 = 0$, $x - 8 = 0$, $x + 8 = 0$, $x - 12 = 0$, $x + 12 = 0$ sont composées. En vain voudroit-on faire la division par $x - 1$, & $x + 1$; d'où il est facile de conclure que 1 n'est pas une fausse racine, ni une des véritables. Il faut donc tenter cette division par $x - 2$.

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \quad (x^2 - x - 12x - 2) \\
 x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 - x^2 - 10x \\
 - x^2 + 2x \\
 \hline
 - 12x + 24 \\
 - 12x + 24 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Par où je vois que 2 est une des racines véritables ; & comme 12 est le dernier membre dans le quotient , 8 & 12 ne sont pas dans le nombre des racines.

On essaye en vain de diviser par $x - 3$, l'équation quarrée $x^2 - x - 12 = 0$, mais on en vient à bout par $x + 3$.

E X E M P L E.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - x - 12 \quad (x + 4 \\
 x + 3 \overline{) x^2 + 3x} \\
 \underline{-4x - 12} \\
 -4x - 12 \\
 \underline{0}
 \end{array}$$

3 est donc une fausse racine de l'équation , parce que $x - 4 = 0$, 4 est une autre racine véritable.

De même , soit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$; les produisans du dernier membre seront 1 , 3 , 5 ; il faut donc essayer les diviseurs $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 5 = 0$, $x + 5 = 0$. Commençons à faire la division par $x - 1$.

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 - 13x + 15 \quad (x^2 - 2x - 15x - 1) \\
 x^3 - x^2 \\
 \underline{-2x^2 - 13x} \\
 2x^2 + 2x \\
 \underline{-15x + 15} \\
 15x + 15 \\
 \underline{0}
 \end{array}$$

On voit donc que 1 est une racine vraie dans l'équation proposée. On ne réussiroit pas à vouloir faire la division par $x - 3$ dans l'équation quarrée ; mais on en viendroit à bout en prenant $x + 3$ pour diviseur.

Comme les Problèmes cy-deffus & les exemples rapportés, ne mettent pas suffisamment au fait de la formation des équations composées, lorsqu'on n'est pas bien versé dans l'étude de l'algèbre ; je vais donner en peu de mots quelques explications, qui serviront à faire concevoir la solution des deux Problèmes précédens.

Des Equations composées.

Les équations composées se forment des équations simples, en faisant passer dans le premier membre la grandeur qui est dans le second. De ces deux simples équations, par exemple, $x = a$, & $x = b$, je forme celle-ci $x - a = 0$, & $x - b = 0$. Je multiplie ces deux équations l'une par l'autre ; c'est-à-dire, le premier membre de l'une par le premier membre de l'autre, & le second par le second, ce qui me donne l'équation

$$\begin{array}{r} x - a = 0 \\ x - b = 0 \\ \hline xx - ax + ab = 0 \\ x - bx \end{array}$$

Dont les deux produisans sont $x - a = 0$, & $x - b = 0$; pour décomposer cette équation il est évident qu'il faut retrouver ses deux produisans, par le moyen desquels on trouvera aisément, que les va-

leurs de x étant a & b , cette inconnue a par conséquent autant de valeurs que l'équation a de degrés.

Les produisans d'une équation composée se nomment *racines de l'équation*, soit qu'ils soient égaux ou qu'ils ne le soient pas. Ainsi *tirer les racines d'une équation*, c'est trouver les différentes grandeurs qui l'ont produite.

Si dans une équation composée l'inconnue se trouve à un même degré dans plusieurs termes, on les écrit les uns sous les autres, parce qu'ils n'en font qu'un, ainsi $-ax - bx$ ne font qu'un terme, comme dans l'exemple cité.

Il faut observer dans la formation des équations ;
 1°. Que le *coefficient* du second terme est égal à la somme des racines de l'équation. 2°. Que dans les équations qui ont plus de trois termes, le coefficient du troisième comprend les produits des racines multipliées deux à deux de toutes les façons qu'elles peuvent se multiplier. 3°. Que dans les équations qui ont plus de quatre termes, le coefficient du quatrième contient les produits des quatre racines multipliées trois à trois, & ainsi des autres équations qui ont plus de cinq, six termes, &c.
 4°. Enfin, que dans toutes les équations, le dernier terme est une quantité toute connue, qui est le produit de toutes les racines.

Corollaire.

Si le second terme manque dans une équation ; il faut nécessairement qu'il y ait des racines positives & des négatives qui s'entre-détruisent ; si le troisième terme manque dans celles qui en ont plus de trois, il faut qu'il y ait des produits des racines négatifs & d'autres positifs qui s'entre-détruisent ; si

le quatrième, &c. Lorsque l'équation a tous ses termes on la résout facilement, en se rappelant que le carré de tout binôme $x + b$ contient dans son premier terme, le carré du premier terme x du binôme, deux fois le premier terme x multiplié par le second, ou le double du second multiplié par le premier, & enfin le carré du second. Nous avons déjà fait presque toutes ces observations (§. 75.)

Problème XXXVI.

77. Extraire par approximation la racine de quelque équation que ce soit.

Solution.

Pour donner plus de clarté à la règle nous allons l'appliquer aux exemples, en commençant par l'équation carrée.

Soit $x^2 - 5x - 31 = 0$. Supposons que la racine est $8 + y$, en sorte que y marque l'excès ou le défaut de 8 à l'égard de la racine. On aura donc

$$\begin{aligned} xx &= 64 + 16y + yy \\ -5x &= -40 - 5y \\ -31 &= -31 \\ 7 + 11y + yy &= 0 \end{aligned}$$

Comme les grandeurs de la fraction vont en diminuant, & que nous ne considérons ici que la racine qui approche le plus de la véritable, on peut laisser le terme yy , & le prendre au lieu de l'équation.

$$\begin{aligned} \div 7 + 11y &= 0 \\ \text{C'est-à-dire, } 11y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 0.6 = 0.\frac{6}{10} \\ \text{De là vient } x &= 8 + 0.6 = 8.6 \end{aligned}$$

Mais comme la valeur de x dans les parties décimales n'est pas encore assez déterminée, mettez $x = 8.6 + y$, & en recommençant l'opération vous trouverez

$$\begin{array}{r} xx = \frac{7396}{100} + \frac{172}{10} y + yy \\ - 5x = - \frac{430}{10} - 5y \\ - 31 = - 31 \\ \hline \frac{7396}{100} - \frac{430}{10} - 31 + \frac{172}{10} y - 5y = 0. \end{array}$$

Ayant réduit les fractions à la même dénomination, l'équation se change en

$$\begin{array}{r} 7396 - 4300 - 3100 + (1720 - 500)y = 0 \\ - 0.04 + 12.20y = 0 \\ 12.20y = 0.04 \\ y = 0.0032 \end{array}$$

Cette opération donne donc la racine cherchée $8.6000 + 0.0032 = 8.6032$.

Si l'on désire une racine encore plus exacte, il faudroit mettre $x = 8.6032 + y$; d'où l'on auroit $xx = 74.01505024 + 17.20640000y + yy - 5x = -43.01600000 - 5.00000000y - 31 = -31.00000000$.

$$\begin{array}{r} - 0.000094976 + 12.20640000y = 0 \\ 12.20640000y = 0.000094976 \\ y = 0.000077808 \\ \text{Donc } x = 8.603277808 \end{array}$$

Voyons à présent la manière d'extraire la racine

de l'équation cubique $x^3 + 2xx - 23x - 70 = 0$.
Mettez

$$5 + y = x$$

On aura $x^3 = 125 + 75y \dots$

$$2x^2 = 50 + 20y \dots$$

$$- 23x^1 = - 115 - 23y$$

$$- 70 = - 70$$

$$- 10 + 72y = 0$$

$$72y = 10$$

$$y = 0.1$$

Par conséq. $x = 5 + 0.1 = 5.1$

Mettez ensuite $x = 5.1 + y$; vous aurez

$$x^3 = 132.951 + 78.030y \dots$$

$$2xx = 52.020 + 20.400y \dots$$

$$- 23x = - 113.000 - 23.000y \dots$$

$$- 70 = - 70.000$$

$$- 2929 = 95.430y = 0$$

$$75.430y = 2.629$$

$$y = 0.0348$$

Par conséq. $x = 5.1 + 0.0348 = 5.1348$.

Pour trouver plus facilement la racine dans une quantité de chiffres, il faut retenir la valeur de yy , & résoudre l'équation par la méthode ordinaire (§. 51.) en y ajoutant cependant quelques fractions décimales, à sçavoir lorsque $x = 5 + y$, on aura

$$x^3 = 125 + 75y + 15yy$$

$$2x^2 = 50 + 20y + 2yy$$

$$- 23x = - 115 - 23y$$

$$- 70 = - 70$$

$$- 10 + 72y + 17yy = 0$$

$$17yy + 72y = 10$$

$$yy + 4.2352y = 0.58823530$$

$$4.484229764 = 4.48422976$$

$$yy + 4.2352y + 4.484229764 = 5.07246506$$

$$y + 2.1176 = 2.2522$$

$$y = 0.1346$$

$$\text{donc } x = 5.1346$$

Si l'on mettoit de rechef $x = 5.1346 + y$, & qu'on cherchât la valeur de y comme auparavant, on approcheroit de si près de la véritable racine dans ce second calcul, qu'on y toucheroit, pour ainsi dire.

Fin de l'Algèbre.



E L E M E N S

D E

G E O M É T R I E .

D E F I N I T I O N . I .

1. **L**A *Géométrie* est la Science de l'étendue qu'occupent les corps, & de leurs propriétés selon leurs trois dimensions, *longueur, largeur & profondeur.*

On appelle *Matière* ou *Corps*, tout ce qui a des parties unies les unes aux autres.

D E F I N I T I O N . I I .

2. La *Ligne* est la longueur considérée sans égard à la largeur & à la profondeur. Le commencement & la fin de la ligne se nomme *Point*. Dans la *Géométrie*, le *Point* est une portion de matière considérée comme n'ayant point de parties, ou comme *indivisible*; car autrement on le considéreroit comme une ligne qui auroit aussi son commencement & sa fin. La ligne est la trace que laisseroit après lui un point qui iroit de A en B. *Planche I. Fig. 1.*

Remarque.

3. Ce n'est pas sans raison que les Géomètres considèrent le point comme tellement indivisible, que loin qu'un homme soit capable d'en former un semblable avec aucun instrument, il ne puisse pas même l'imaginer. C'est afin qu'on ne considère pas l'extrémité d'une ligne comme une de ses parties; car dans la Géométrie pratique, il faut bien se garder de le penser ainsi.

DEFINITION III.

4. La *Ressemblance* est cette identité des parties, par lesquelles une chose se distingue d'une autre.

Remarque.

5. Supposons qu'ayant deux choses A & B absolument semblables, vous les considériez avec attention l'une & l'autre en particulier. Vous remarquerez exactement tout ce qu'on peut observer dans la chose A, & vous écrirez vos observations. Après en avoir fait autant de B, comparez tout ce que vous avez remarqué, & vous trouverez absolument la même chose, si vous en exceptez cependant la quantité qu'on ne peut expliquer par de simples expressions.

Corollaire.

6. On ne peut donc distinguer deux choses semblables, qu'en comparant actuellement entr'elles les idées que l'une & l'autre font naître dans l'esprit, ou avec une troisième chose, comme feroit une mesure.

D E F I N I T I O N IV.

Pl. I.
Fig. 1.

7. On nomme *Ligne droite* A B, celle dont chaque partie est semblable au tout, & qui est le plus court chemin d'un point A à un point B. Elle a ses parties également posées entre ses extrémités, & est unique, parce que d'un point à un autre point, il ne peut y avoir deux plus courts chemins. La *Ligne courbe*, C D est celle dont les parties ne ressemblent pas au tout, & qui ne sont pas posées également entre ses extrémités. Il y en a de *Régulières* & d'*irrégulières*; la première se conduit toujours du même sens, & non pas la seconde C D.

Remarque première.

8. La ligne droite se tire sur le papier avec une plume, un crayon, un pinceau, &c. en suivant la règle donnée pour les points. On la tire sur le bois ou la pierre, avec un fil frotté de craye ou de charbon; pour marquer une ligne droite sur la terre, on plante deux bâtons, & on la tire de l'un à l'autre. On connoît qu'elle est droite, en plantant sur la même ligne un troisième bâton entre les deux autres, parce qu'alors appliquant un œil devant le premier, il doit empêcher de voir les autres, car si l'on en apperçoit plus d'un, la ligne n'est pas exactement droite.

Remarque seconde.

9. Pour mesurer une ligne on se sert d'une longueur déterminée, par exemple, d'une *Toise*, que l'on divise en pieds, le pied en pouces, le pouce en lignes, &c. & comme la mesure est arbitraire, on conçoit aisément qu'elle n'est pas la même dans tous les pays.

Remarque troisième.

10. Il faut encore bien faire attention que la division de la perche, de la toise, pied, &c. est différente selon les Provinces, Royaumes, & même les villes. La mesure du Rhin est ordinairement divisée en 12 parties, & la mesure Géométrique n'est divisée qu'en 10.

DEFINITION V.

11. La définition de la ligne courbe est connue de tout le monde. Le *Cercle* se fait en conduisant Pl. I.
une ligne droite en rond autour & à égale distance Fig. 1.
ce du point fixe C.

Remarque.

12. On se sert d'un instrument qu'on nomme *Compas*, pour marquer un cercle sur du papier. Quand on veut le figurer sur la terre, & dans toutes les occasions où l'on ne peut user de l'ouverture du compas, on se sert d'un fil, d'une ficelle ou d'une perche, attachés par un bout à un point fixe qui sert de centre.

DEFINITION VI.

13. On nomme *Centre* du cercle le point C, parce que tous les points de la circonférence A, D, Fig. 1.
F, G, E, en sont également éloignés (§. 11.) La ligne droite CA se nomme le *demi diamètre* ou le *Rayon*; la ligne qui commence au point D de la circonférence & finit à l'autre point de la circonférence E, en passant par le centre C, se nomme *Diamètre*; & toute autre ligne qui prenant naissance à un point de la circonférence, va finir à un au-

tre point , fans passer par le centre , se nomme *Corde* , ou *Soutendante*.

Remarque.

14. On divise la circonférence de quelque cercle que ce soit en 360 parties égales , qu'on nomme *Degrés* , parce que ce nombre peut être facilement & exactement divisé par beaucoup d'autres , comme 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 8 , 9 , 10 , 12 , &c. On divise ensuite chaque degré en 60 minutes , & chaque minute en 60 *Secondes*. On désigne ordinairement les degrés par (°) les minutes par (') & les secondes par (") par exemple 3°. 25'. 17". Cela veut dire 3 degrés , 25 minutes & 17 secondes , ou bien 3° toises 2' pieds 4" pouces 5¹¹ lignes.

DEFINITION VII.

Pl. I.
Fig 3.

15. Lorsque deux lignes AB & AC , s'inclinant l'une vers l'autre se coupent en un point A , on appelle *angle* , l'espace qui se trouve entre ces deux lignes.

Remarque.

16. On marque cet angle par une seule lettre A , ou pour éviter la confusion , & le distinguer des autres angles , on le marque quelquefois avec les trois lettres BAC , en sorte que A affecté au *sommet* ou *pointe* de l'angle , tienne le milieu entre B & C. La grandeur de l'angle se mesure par un petit arc fait avec un compas ouvert à volonté , dont on met une jambe au point A comme centre , & l'on conduit l'autre , par exemple de D en E. On dit donc que l'angle est d'autant de degrés que l'arc DE en contient , ce que l'on mesure avec un
demi

cercle de laiton ou autre matiere, à qui l'on donne aussi le nom de *Rapporteur*.

DEFINITION VIII.

17. La *Ligne perpendiculaire* est celle qui en coupe une autre à angles droits; c'est-à-dire, de façon que les angles qu'elle forme de part & d'autre Pl. I. soient égaux. Ainsi l'on connoît que la ligne AB Fig. 4 est perpendiculaire à la ligne CD.

DEFINITION IX.

18. L'angle ABC formé par la perpendiculaire AB & la ligne BC s'appelle *angle droit* (§. 17.) Fig. 4. Tout angle plus petit E que le droit se nomme *angle aigu*, Fig. 5. & tout autre angle plus grand que le droit, comme seroit F, se nomme *angle obtus*. Fig 6.

DEFINITION X.

19. L'angle A fermé par la ligne droite BC, Fig. 7. se nomme *Triangle*. Lorsqu'un des trois angles de ce triangle est droit, comme A, on le nomme *Triangle rectangle*. Lorsqu'un des trois est obtus, Fig. 8. comme O, on l'appelle *Amblygone* ou *Obtus-angle*; & lorsque tous trois sont aigus, il se nomme Fig. 9. *Oxigone* ou *Acutangle*. Si les trois côtés sont égaux, on les nomme *Equilateral*; s'il n'a que deux Fig. 10. côtés égaux AB & BC, on l'appelle *Equijambe*, ou *Isocèle*; si aucuns des côtés ne sont égaux entr'eux, Fig 11. comme HTK, il se nomme *Triangle Scalene*.

La *base* d'un triangle est le côté sur lequel on abaisse une perpendiculaire de l'angle opposé B. Fig. 9. Cette perpendiculaire se nomme *Hauteur du triangle* par rapport à sa base. Les deux parties de la base

divisée par la perpendiculaire se nomment *Segmens de la base*.

On appelle aussi *base* le plus grand côté d'un triangle rectangle ; sçavoir celui qui est opposé à l'angle droit. Il se nomme plus communément *Hypothénuse*. Dans le triangle isocèle, on prend ordinairement pour *base*, le côté inégal aux autres.

DEFINITION XI.

20. Le *Quarré* est une figure dont les quatre côtés AB , BC , CD , DA sont égaux, & forment des angles droits. Le *Rectangle* ou *Quarré long* est celui dont tous les angles sont droits, mais dont les deux côtés opposés seulement sont égaux, comme EH & FG , & les deux autres plus petits EF & HG . Le *Rhombé* ou *Losange* en terme de Blason, a les quatre côtés IK , KL , LM , MI égaux, & les angles obliques. Le *Rhomboidé* a les quatre angles obliques, mais il n'a de côtés égaux que les deux opposés ON & PQ , QN & OP .

On nomme *Trapeze* le *Quadrilatere*, ou figure à quatre côtés, mais dont aucun n'est égal avec les autres, comme $STVZ$. On donne enfin le nom de *Trapezoidé* à la figure quadrilatere, dont deux des côtés opposés sont parallèles entr'eux, comme EF & GH .

DEFINITION XII.

21. Toutes les autres figures qui ont plus de quatre côtés se nomment *Poligones*, & prennent des noms particuliers selon la quantité déterminée qu'ils en ont ; *Pentagones*, s'ils en ont cinq égaux ; *Exagones*, s'ils en ont six, *Eptagones* quand ils en ont sept ; *Octogones* s'ils en ont huit ; *Endecagones* s'ils en ont neuf, & *Dodecagones* s'ils ont

DE GEOMETRIE. 147

douze côtés. Quand tous les angles d'un poligone sont égaux , comme dans l'*Exagone* A B C D E F, on le nomme *Poligone regulier* , ou figure réguliere ; si au contraire les côtés & les angles ne sont pas égaux , on l'appelle *Poligone irregulier* , comme le *Pentagone* G H I K L. Fig. 18.
Fig. 19

DEFINITION XIII.

22. On nomme *Paralleles* deux lignes A B & C D, qui quelque longueur qu'elles aient , sont toujours également distantes l'une de l'autre. Pl. I.
Fig. 10.

DEFINITION XIV.

23. Le *Parallélogramme* est une figure de quatre côtés , dont les deux opposés sont paralleles entr'eux , comme le quarré , le Rhombe , &c. Quand les angles d'un parallelogramme sont droits, on l'appelle *Parallélogramme rectangle* , ou simplement *Rectangle*. Pl. I.
Fig. 12.

La *Base* d'un *Parallélogramme* est le côté sur lequel on lui a tiré , de l'un de ses deux angles opposés , une perpendiculaire qu'on appelle *hauteur du Parallélogramme* par rapport à sa base I M , où l'on voit que la perpendiculaire tombe en dehors en L O , & qu'elle tomberoit en dedans si on l'avoit tirée de l'angle K. Fig 14

Axiome I.

24. Entre deux points il ne peut y avoir qu'une seule ligne droite.

Corollaire I.

25. Deux lignes droites ne peuvent donc renfermer une espace ou étendue , parce qu'elles doivent se rencontrer.

K ij

vent se réunir aux points de leurs extrémités.

Corollaire I I.

Pl. I. 26. Par conséquent dans tous triangles, deux
Fig. 7. 8. côtés pris ensemble, comme A B, & B C sont
9. 10. plus grands que le troisième A C.

Axiome I I.

27. Tous les rayons d'un cercle sont égaux entr'eux (§. 13.)

Axiome I I I.

Fig. 21. 28. Les arcs D E & B C, & tous les autres renfermés entre les jambes de l'angle A B & A C, & qui ont pour centre le sommet de l'angle A, ont la même quantité de degrés.

Corollaire.

Pl. I. 29. Puisque la grandeur de l'angle A se mesure
Fig. 21. par le nombre des degrés de l'arc D E ou B C (§. 16.) quand on voudra donc mesurer un angle, soit grand ou petit, il suffira de faire un arc semblable à D E ou B C.

Axiome I V.

30. Les lignes droites, & les angles qui se couvrent mutuellement sont égaux : & s'ils sont égaux, ils se couvriront.

Axiome V.

31. Les figures qui se couvrent mutuellement sont semblables & égales : & celles qui sont égales & semblables se couvrent mutuellement. (§. 4.)

Remarque.

32. Il faut bien observer, que pour que deux figures soient égales, elles doivent se couvrir mutuellement : car quoique de deux grandeurs mises l'une sur l'autre, celle de dessus couvre celle de dessous ; si la grandeur de dessous, renversée sur celle de dessus, ne pouvoit la couvrir exactement, elles ne seroient pas égales ; ainsi deux grandeurs doivent avoir précisément la même figure, & les bords de même étendue pour pouvoir se couvrir mutuellement.

Axiome VI.

33. Si deux figures ou lignes sont formées ou décrites de la même manière, & par de semblables moyens & de semblables instrumens, ces figures ou lignes sont semblables entr'elles. (§. 4.)

Corollaire.

34. Tous les points (§. 2. & 4.) & les lignes droites étant semblables entr'elles (§. 7.) & le cercle étant formé par une ligne droite tournée en rond autour d'un point (§. 11.) tous les cercles, & leurs circonférences doivent être semblables, quand à la figure.

Axiome VII.

35. Deux angles de même mesure sont égaux entr'eux : & s'ils sont égaux, ils ont la même mesure (§. 16.)

Axiome VIII.

36. Sur quelque ligne que ce soit, A B ayant pl. I. choisi un point, on peut former un demi-cercle Fig. 11. (§. 11.)

Corollaire.

37. Si du centre C on éleve une perpendiculaire CD , les angles o & x feront égaux entr'eux (§. 17.) le quart d'un cercle, c'est-à-dire, 90° (§. 16, 36.) est donc la mesure d'un angle droit, & par conséquent tous les angles droits sont égaux entr'eux (§. 35.) & un angle égal à un droit, est un angle droit (§. 35.)

Théorème I.

Pl. I. 38. Les deux angles x & o , formés par la ligne
Fig. 22. perpendiculaire DC appuyée sur la ligne AB , pris ensemble, font 180° .

Démonstration.

Pl. I. On peut décrire un demi cercle du point C sur
Fig. 22. la ligne AB (§. 36.) le demi cercle est donc la mesure de la somme des angles x & o (§. 16.) qui feront par conséquent 180° , puisque le cercle entier est composé de 360° .

Corollaire.

39. Si nous avons donc un angle inaccessible à mesurer dans un champ, ou un angle obtus, par un quart de cercle on mesure alors l'angle de suite qu'il faut leur substituer.

Définition XV.

Pl. I. Si l'on prolonge l'un des côtés CB d'un angle
Fig. 24. CBA au-de-là du sommet B en E , l'angle ABE fait par le prolongement BE avec l'autre côté AB , & l'angle ABC se nomment *Angles de suite*. Et si

l'on prolonge aussi l'autre côté AB en H, l'angle ABC & l'angle HBE se nomment *Angles opposés au sommet*, ou *verticaux*.

Théorème. II.

40. Si la ligne droite AB coupe l'autre CD au point *u* les angles *verticaux* *o* & *x* sont égaux. Pl. I.
Fig. 25;

Démonstration.

$O + u = 180^\circ$ & $u + x = 180^\circ$ (§. 38.)
donc $o + u = u + x$ (§. 22. Arithm.) & par conséquent $o = x$ (§. 28 Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

41. Si nous avons donc un angle à mesurer dans un champ ou ailleurs, au lieu de mesurer *x* qui peut-être seroit inaccessible, il faudra seulement mesurer l'angle vertical *o*, parceque les angles *opposés au sommet* sont égaux. Pl. I.
Fig. 25;

Théorème III.

42. Tous les angles dont la pointe, où sommet est au point C pris ensemble, sont égaux à quatre angles droits, ou, ce qui est le même à 360° . Pl. I.
Fig. 26;

Démonstration.

Le cercle entier est la mesure des angles énoncés dans le Théorème, (§. 11. 16.) si on les prend donc tous ensemble, ils contiendront les quatre angles droits qui font le cercle entier, (§. 37.) ou 360° (§. 14.)

Problème I.

43. Mesurer un angle donné.

K jv

Solution.

Pl. I.
Fig. 27.

1°. Si l'angle donné est sur le papier, posez le centre du rapporteur sur la pointe de l'angle A, & ajoutez le bord intérieur de la règle qui fait le diamètre du rapporteur sur la jambe de l'angle A B.

2°. Comptez ensuite sur le rapporteur le nombre des degrés que contient l'arc DE qui se trouve entre les deux côtés de l'angle AB & AC.

Si l'angle proposé est dans un champ,

Pl. I.
Fig. 28.

1°. Posez le *demi-cercle*, ou *graphomètre*, de façon que son diamètre AB réponde à un des côtés du triangle.

2°. Faites tourner sur le centre du graphomètre la *règle* ou *alidade* EF jusqu'à ce que vous aperceviez l'extrémité de l'autre côté de l'angle à travers la fente des pinnules qui sont attachées à cette alidade.

3°. Comptez ensuite les degrés que marque la *ligne de foi* de l'alidade qui passe par le centre du demi-cercle, en commençant à la jambe de l'angle à laquelle répond le diamètre du graphomètre; & vous connoîtrez la grandeur de l'angle (§. 16.)

Problème II.

44. Mesurer une ligne droite.

Solution.

Si la ligne proposée est sur le papier, tirez aussi une ligne droite sur le papier, de laquelle vous ferez une *mesure* ou *longueur* sur laquelle vous prendrez avec un compas dix parties égales à volonté, que vous nommerez *Pieds*; vous transporterez ensuite cette longueur de dix pieds sur le reste de votre mesure autant de fois que faire se pourra, & vous

aurez une mesure (§. 9.) propre à mesurer toute ligne droite sur le papier.

Si la ligne à mesurer est dans un champ, on se sert d'une chaîne, d'une corde, d'une perche ou toise, dont les divisions sont connues; il suffit de diviser une toise en pieds; & la dernière d'une extrémité doit être divisée en pouces.

Lorsqu'on proposera donc une ligne droite à me- Pl. I I.
surer sur le papier. Fig. 29.

1°. Posez une jambe d'un Compas sur A & ouvrez - le jusqu'à ce que l'autre jambe soit posée sur B.

2°. Transportez ensuite une jambe du compas ainsi ouvert sur le commencement d'une division, par exemple de dix pieds, & l'autre jambe sur le reste de votre mesure proposée, en remarquant bien exactement sur quelle autre division elle tombera, par exemple, 5 pouces, ou 5 lignes. On verra par là que la ligne proposée a 10°. & 5^l. ou 5ⁿ. de longueur, parce qu'elle contient 10 pieds & 5 pouces ou lignes de la mesure préparée.

Voulez - vous mesurer une ligne donnée sur la terre?

1°. Plantez un piquet à chaque extrémité, & si la ligne donnée étoit beaucoup plus longue que votre *toise*, *perche*, *corde*, &c. posez un bout de votre mesure au bas d'un des petits piquets plantés aux extrémités de la ligne donnée; conduisez l'autre bout de la mesure sur la ligne, & à l'extrémité de cette mesure, plantez un piquet pour faire souvenir que l'espace d'entre ces deux piquets est la longueur d'une toise, perche &c. Transportez ensuite votre mesure depuis le second piquet que vous venez de planter, jusqu'à l'extrémité de la ligne proposée, en observant de planter un piquet au bout de chacune des longueurs de votre mesure.

2°. Comptez le nombre de toises, &c. que la ligne donnée contient, par le nombre de fois qu'elle renferme la longueur de votre mesure, en tout ou en parties.

Remarque I.

45. On peut ajuster un anneau à chaque extrémité de la chaîne ou corde, dans lesquels anneaux on fait entrer les petits bâtons ou piquets plantés en terre.

Remarque II.

46. Les chaînes sont incommodes par leur pesanteur, & on ne les étend pas assez facilement. Si on mesure une ligne droite avec une perche en la tournant sur pointe, il faut avoir soin ou d'ajouter à la ligne que l'on mesure la grosseur ou diamètre de la perche autant de fois qu'on l'aura tournée, ou de diminuer le diamètre de la perche, de la longueur de la ligne qu'aura produit la mesure, autant de fois qu'on l'aura tournée. Je suppose, par exemple, que l'on me propose une ligne droite de six toises à mesurer; je prends en main une perche de la longueur précisément d'une toise, & d'un pouce de diamètre ou de grosseur, & j'approche un bout de cette perche d'un des piquets plantés aux extrémités de la ligne proposée; ensuite je leve le bout de la perche qui touchoit au piquet, & j'en forme en l'air un demi-cercle dont le centre est à l'autre bout de la perche, qui dans le moment qu'elle forme une perpendiculaire avec la ligne droite donnée, se trouve posée sur la grosseur, & puis achevant le demi-cercle, en la couchant doucement sur le reste de la ligne donnée, le diamètre de ce demi-cercle se trouve avoir deux toises & un pouce, au lieu de deux toises seulement. Je continue à me-

furur de la même façon le reste de la ligne droite , & je trouve que cette ligne ne me paroît avoir que 5 toises & 7 pouces au lieu de 6 toises qu'elle a en effet. Cela vient donc de la grosseur de la perche qui ayant un pouce de grosseur , & ayant été tournée 5 fois , a pris 5 pouces de la ligne donnée qu'il faut par conséquent ou ajouter à cette ligne donnée , ou diminuer de la longueur de la perche , pour faire la juste mesure de la ligne proposée.

Il n'y a pas moins d'inconvéniens à se servir d'une corde de chanvre ; elle s'allonge dans les tems chauds & secs , & se raccourcit dans les tems humides. Schwenter a remarqué , (livre 1. trait. 2. p. 381. de sa Géom. prat.) qu'une corde de 16 pieds de longueur , s'étoit raccourcie presque d'un pied en moins d'une heure dans un tems de brouillards. Pour lever cet inconvénient , il faut tordre les ficelles dont on veut faire la corde , dans un sens contraire à celui que l'on tordra la corde même , qu'il faudra en même - tems imbiber d'huile de lin , & quand elle sera sèche , la passer dans de la cire fondue , & enfin la goudronner. Le même Schwenter assure , (p. 382.) qu'une corde ainsi préparée resteroit un jour plongée dans l'eau sans qu'on y pût remarquer presque aucune diminution de longueur.

Remarque III.

47. On a inventé un instrument fort commode pour mesurer les lignes sur le papier ; on le nomme *Echelle Géométrique* ; nous en parlerons plus au long dans la suite.

Problème III.

48. Faire un angle égal à un angle donné.

Pl. I.
Fig. 27.

I. C A s. Si on propose l'angle par degréz , tirez d'abord la ligne droite AB.

1°. Appliquez le centre du rapporteur sur le point A , & son rayon sur la ligne AB.

2°. Comptez autant de degréz depuis D vers E que l'angle donné doit en avoir.

3°. Quand vous aurez trouvé ce nombre, marquez-le par E.

4°. Tirez enfin une ligne droite de A par E, & vous aurez l'angle que vous cherchez.

Pl. II.
Fig. 31.

II. C A s. Lorsqu'on propose l'angle DEF sur le papier.

1°. Du centre E décrivez à volonté l'arc GH.

2°. Tirez ensuite la ligne droite ef.

3°. De e décrivez l'arc hi avec la même ouverture de compas de laquelle vous avez formé l'arc ci-dessus GH.

4°. Posez une jambe du compas sur H, & ouvrez le compas jusques à ce que l'autre porte sur le point G.

5°. Posez une jambe du compas ainsi ouvert sur h & posant l'autre sur l'arc hi, vous marquerez le point où elle tombe g.

6°. De e par g tirez une ligne droite ed, & vous aurez l'angle que vous cherchez.

III. C A s. Si l'angle que l'on propose est sur la terre ; il faut se servir du demi-cercle ou graphomètre, de la manière que nous avons dit au problème I. (§. 43.)

Démonstration.

Le premier & le troisième cas sont démontrés par l'opération même.

Dans le second, l'arc $gh = GH$, comme on le démontrera, (§. 92) & par conséquent l'angle

$d e f = DEF$ (§. 16. 35.) *ce qu'il falloit démon-*
trer.

Théorème IV.

49. Si dans les deux triangles ABC & abc , on Pl. II.
 a l'angle $A = a$, $AC = ac$, & $AB = ab$; on aura Fig. 32.
 aussi $BC = bc$ $B = b$, $C = c$, & les triangles se-
 ront égaux entre eux.

Démonstration.

Imaginons - nous que le triangle abc est telle-
 ment placé sur le triangle ABC , que le point a soit
 sur A , & la ligne droite ab sur AB , comme $ab =$
 AB , le point b fera sur B ; (§. 30.) & comme $a =$
 A , la droite ac sera aussi placée sur AC (§. 30.) &
 parce que $ac = AC$, le point c fera sur C , & par
 conséquent bc sur BC (§. 24.) les triangles ABC
 & abc seront donc égaux; (§. 31.) *Ce qu'il falloit*
démontrer.

Théorème V.

50. Si dans les deux triangles ABC & abc on a Pl. II.
 l'angle $A = a$ & $B = b$, & le côté $AB = ab$; les Fig. 32.
 triangles seront égaux, & $AC = ac$, $BC = bc$.

Démonstration.

Représentons - nous le triangle ABC posé sur le
 triangle abc de maniere que A soit posé sur a , & le
 côté AB sur le côté ab ; puis B sur b , la droite AC
 sur ac , & BC sur bc (§. 30.) pour lors les lignes
 droites AC & BC se rencontrent au point C , &
 les droites ac & bc au point c , le point C se trou-
 vera donc posé sur le point c , & les triangles seront
 égaux. (§. 31.) Et $AC = ac$, &c. *Ce qu'il falloit*
démontrer.

Théorème VI.

Pl. II.
Fig. 32.

§ 1. Si dans les deux triangles ACB & acb , on trouve $AC = ac$, $AB = ab$, & $BC = bc$; on aura aussi $A = a$, $B = b$, $C = c$, & tous les triangles de cette façon seront égaux.

Démonstration.

Pl. II.
Fig. 32.

De A rayon AB décrivez avec un compas l'arc y , & de C rayon CB décrivez l'arc x ; supposons ensuite le triangle acb posé de façon sur le triangle ACB , que le point a soit sur A , & le point c sur C ; (§. 30.) la ligne droite ab se terminera à l'arc y , & cb à l'arc x ; le point b fera donc sur B , à l'endroit précisément où les arcs se coupent; & par conséquent les triangles (§. 31.) & les angles (§. 30.) seront égaux.

Corollaire.

§ 2. On doit donc conclure que de trois lignes droites données, on ne peut faire qu'un même triangle.

Problème IV.

Pl. II.
Fig. 33.

§ 3. Construire un triangle équilatéral sur la ligne donnée AB .

Solution.

1°. Posez une jambe du compas sur A ; & ouvrez le compas jusqu'à ce que l'autre jambe rencontre B , & sans changer la jambe du compas posée sur A , décrivez avec l'ouverture de AB , un arc au-dessus de la ligne donnée.

2°. Mettez ensuite une jambe du compas sur B ,

& de la même ouverture décrivez un autre arc qui coupera le premier au point C.

30. Tirez enfin des lignes droites de C à A & B, & le triangle se trouvera fait.

Démonstration.

Les lignes droites AC & BC ayant été prises en égale longueur que la ligne AB; (§. 27.) le triangle ACB doit être équilatéral. (§. 19.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème V.

54. Sur deux lignes droites données AB & BC, faire un triangle qui ait deux côtés égaux.

Solution.

1°. Ayant pris, par exemple, pour base du triangle la ligne droite AB, posez une jambe du compas sur B, ouvrez l'autre jambe jusqu'en C, & formez un arc au même point C. Pl. II.
Fig. 34.

2°. Faites sur A comme vous avez fait sur B, & ce second arc coupera le premier au point C.

30. Tirez des lignes droites de C à A & B, & le triangle sera formé.

Démonstration.

Les lignes droites AC & BC ont été faites de la même ouverture de compas; le triangle doit donc avoir les deux côtés égaux. (§. 19.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème VI.

55. Faire un triangle de trois lignes droites données. Pl. II.
Fig. 35.

Solution.

1°. Prenez pour base du triangle une des trois ; comme feroit AB.

2°. De A comme centre , décrivez un arc avec un compas , dont l'ouverture soit la longueur d'une seconde des trois lignes données , comme AC.

3°. Et puis ouvrant le compas de la longueur de la troisième ligne BC , posez une jambe sur B , & de l'autre formez un arc qui coupe le premier au point C.

4°. Tirez ensuite les lignes droites , CA & CB ; & vous aurez le triangle que vous desirez (§. 52.)

Remarque I.

56. Si dans l'opération ci-dessus les deux arcs ne se coupent pas , on ne peut faire le triangle avec les trois lignes droites données. (§. 26.)

Remarque II.

57. Les règles pour la construction des figures sont d'une très grande utilité. C'est sur elle qu'est fondée toute l'*Ichonographie* d'un champ , c'est-à-dire , la levée des plans , sans laquelle il n'est pas possible de dresser la Carte d'un terrain. Bien plus , les principes de ressemblance que j'ai introduit dans la Géométrie , servent aussi , comme on le verra dans la suite , à la démonstration de la ressemblance des Figures. On y voit même les parties qu'on doit choisir dans un terrain , quand il s'agit de le mesurer , ou d'en dresser un plan figuré ou non figuré. C'est en conséquence de cette utilité reconnue que je vais proposer encore quelques problèmes sur les triangles.

Problème.

Problème VII.

Pl. II.
Fig. 36.

58. Faire un triangle de deux lignes droites données AB & AC, & de l'angle intercepté A.

Solution.

1°. Prenez pour base la droite AB.

2°. Formez au point A un angle égal à l'angle proposé. (§. 48.)

3°. Transportez sur la ligne AD l'autre droite donnée AC.

4°. Tirez de C une ligne droite à B & le triangle sera fait. (§. 49.)

Remarque.

59. Il n'est pas nécessaire dans la pratique de marquer les lignes inutiles comme ici AD, mais on peut seulement désigner le point C après l'application de la règle.

Problème VIII.

60. Avec deux Angles & une ligne droite donnés construire un triangle.

Solution

1°. A l'extrémité A de la droite donnée AB, formez un angle égal à un des angles proposés. Pl. II.
Fig. 37.

2°. A l'extrémité opposée faites un autre angle donné; (§. 48.) les jambes de ces deux angles se couperont en C, & formeront le triangle que l'on demande. (§. 50.)

Problème IX.

Pl. II.

Fig. 3^e.

61. Du lieu C mesurer la distance des deux autres lieux accessibles A & B.

Solution.

1°. Plantez un bâton ou petit piquet au lieu C que vous aurez choisi à volonté.

2°. Mesurez la longueur de la ligne AC, (§. 44.) & portez-la de C en *a*, en sorte que le bâton que vous planterez au point *a* soit en ligne droite avec C & A. (§. 8.)

3°. Faites la même opération pour la longueur de la ligne BC que vous transporterez en *b*.

4°. Mesurez enfin la longueur de la ligne *ab*, c'est la distance que l'on demande.

Démonstration.

Les angles *x* & *y* sont égaux (§. 40.) & comme $AC = aC$ & $BC = bC$, on a $ab = AB$ (§. 49.)
Ce qu'il falloit démontrer

Remarque.

62. Si la place étoit trop étroite pour pouvoir transporter en *ab* les longueurs entières des lignes AC & BC, il suffira de transporter la moitié, la troisième ou la quatrième partie en *Ca* & *Cb*, & pour lors on aura $ab = \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$, ou $\frac{1}{4}$ de AB, ce qu'il sera facile de comparer. (§. 152.)

Problème X.

63. Transporter un angle d'un terrain dans un autre avec une chaîne ou avec une corde.

Solution.

Supposons qu'il faille transporter l'angle A en C. Pl. II.

1°. Prenez une longueur à volonté sur chaque jambe de l'angle donné A, & tirez une droite de l'un des points choisis F à l'autre D. Fig. 39.

2°. Transportez de C en d la longueur AD, & attachez la corde aux deux piquets C & d de manière que $Cf = AF$, $df = DF$.

3°. Plantez un piquet en f & vous aurez l'angle $dCf = FAD$.

Démonstration.

Puisque $AF = Cf$, $AD = Cd$ & $DF = df$, l'angle C est donc égal à l'angle A (§. 51.)

Problème XI.

64. Trouver la distance de deux lieux dont un seul B est accessible.

Solution.

1°. Ayant planté un piquet dans un endroit choisi à volonté, comme E, prenez la longueur de la ligne droite EB, que vous transporterez de E en C de manière que le piquet se trouve en ligne droite avec B & C (§. 8.) Pl. II. Fig. 40.

2°. Faites au point C un angle égal à celui de B. (§. 63.)

3°. Marchez enfin de C vers D, jusqu'à ce que le piquet que vous planterez en D, soit en ligne droite avec FC, & EA; & de cette façon la ligne CD sera égale à la ligne AB.

Démonstration.

On a fait l'angle C égal à l'angle B, & la droite
L ij

CE égale à la droite EB. D'ailleurs les angles verticaux sont égaux. (§. 40.) CD est donc égal à AB. (§. 50.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Fig. 41. 1°. On s'y prend encore de la manière suivante. Fichez un piquet en I en ligne droite avec BA, & puis un second où vous voudrez comme en K.

2°. Transportez de K en L la longueur de la ligne IK, & puis en M la ligne BK.

3°. Marchez ensuite de M vers N jusques à ce que vous trouviez un endroit où vous puissiez planter un piquet qui soit en ligne droite avec M & L aussi bien que avec KA, & vous aurez $MN = BA$.

Démonstration.

$BK = KM$ & $IK = KL$. $o = u$ & $m = n$, donc $IB = LM$ & $y = x$. Car $o + m = u + n$, & $IK = KL$, on aura conséquemment $IA = NL$, & $AB = MN$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque premiere.

65. Ce que nous avons dit sur le Problème IX. a lieu ici (§. 62.)

Remarque seconde.

Pl. II.
Fig. 40.

66. Si l'on vouloit trouver la largeur d'une riviere, & que la ligne droite BE ne pût être transportée de E en C le long du rivage, on fichera le piquet E à une distance du rivage choisie à volonté; & dans ce cas la longueur de la droite CD surpassera d'autant plus la largeur de la riviere que le piquet E sera éloigné de son bord,

Problème XII.

67. Tirer par le point C donné une parallèle à la droite AB.

Pl. II.

Fig. 43.

Solution.

1°. Appliquez une règle à la droite AB,

2°. Posez une jambe du compas en C, & ouvrez l'autre jusqu'à la règle, comme si vous vouliez décrire un arc, dont la droite AB fût la *tangente*.

3°. Conduisez ensuite le compas de part & d'autre du point C, tout le long de la règle posée sur AB, & vous aurez la parallèle DE (§. 22.)

Autrement.

On peut faire la même opération avec une *parallèle*, c'est-à-dire, un instrument composé de deux règles tellement attachées l'une à l'autre par deux tenons égaux, qu'on puisse conduire facilement ces deux règles, selon les différens espaces qu'on veut leur faire parcourir. Ayant donc une parallèle, posez une des règles sur la droite AB.

Pl. II.

Fig. 44.

2°. Conduisez l'autre jusqu'au point C, & vous pourrez tout le long de cette seconde règle, tirer la droite DE parallèle à AB.

Remarque.

68. Si dans la première façon de résoudre le Problème, on ne pouvoit ouvrir le compas jusqu'en E, on tirera une parallèle à AB, à une distance proportionnée au compas, ou choisie à volonté, comme CD; & si la distance de F à E étoit encore trop grande pour que le compas y puisse atteindre, on formera encore une autre parallèle à CD, & ainsi

L iij

de suite jusqu'à ce que le compas puisse atteindre le point E : on fera pour lors la droite LM qui sera parallele à la droite AB : car $EF = HI$ & $FG = IK$: donc $EF + FG = HI + IK$: c'est-à-dire, $EG = HK$ (§. 24. Arithm.) & par consequent LM fera parallele à AB (§. 22.)

Problème XIII.

Pl. II. 69. Du point C donné, abaisser une perpendi-
Fig. 45, culaire sur la droite AB.

Solution.

1°. Ayant posé une jambe du compas sur C, coupez avec l'autre la ligne droite AB par un arc à volonté ; comme DE.

2°. De D & E faites une intersection volontaire, comme en F.

3°. Conduisez une ligne droite par F C, jusqu'à G, & vous aurez la perpendiculaire que l'on demande.

Démonstration.

On a $DC = CE$ & $DF = FE$, on aura donc aussi les angles DFG & GFE (§. 51.) & par conséquent les angles de suite égaux à G (§. 49.) la droite CG sera donc aussi perpendiculaire sur AB, (§. 17.)
Ce qu'il falloit démontrer.

Problème XIV.

Pl. II. 70. Elever du point C une perpendiculaire sur
Fig. 46, la droite AB.

Solution.

1°. Mettez une jambe du compas sur C.

2°. Coupez de part & d'autre à égale distance de

C, la ligne droite AB, comme seroit DE.

3°. De D & E faites une intersection en F avec la même ouverture du compas.

4°. Tirez enfin la droite GC par CF, & vous aurez la perpendiculaire demandée.

Démonstration.

On fait $DC = CE$ & $DF = FE$, & on a les angles droits de part & d'autre du point C, (§. 51.) & par conséquent on a la perpendiculaire GC élevée sur AB (§. 17.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autrement.

Faites un instrument avec deux règles que vous ajouterez de façon l'une à l'autre, qu'elles fassent un angle droit: cet instrument se nomme *Équerre*. Pl. II.
Fig. 47.

Appliquez un des côtés de l'équerre sur la ligne donnée AB, de manière que le sommet de l'angle soit précisément sur le point C; puis tout le long de l'autre côté de l'équerre vous tirerez la droite CD, qui sera perpendiculaire.

Démonstration.

L'angle de l'équerre est droit, les lignes DC & CB, tirées le long de cette équerre, font donc aussi un angle droit; & par conséquent DC sera perpendiculaire sur AB (§. 18.)

Théorème VII.

71. Si dans les deux triangles rectangles ABC & abc, on a $AB = ab$, & $BC = bc$, ou dans les angles obliques $A = a$, on aura aussi $AC = ac$, $B = b$, $C = c$, & les triangles seront égaux. Pl. II.
Fig. 43.

L iiiij

Démonstration.

De l'espace BC ayant fait l'arc FG au point C , imaginons-nous que le triangle abc est placé sur l'autre ABC , de façon que le point a est sur A , b sur B , comme l'angle $a=A$, & $ab=AB$: le point c sera donc aussi sur C : & comme $bc=BC$, le point c se trouve sur l'arc FG (§. 13.) & par conséquent aussi c se trouve sur C , précisément au point où l'arc FG coupe la droite AC ; BC tombant donc sur bc (§. 24.) les triangles seront égaux. (§. 31.)

Théorème VIII

Pl. II.
Fig. 49.

72. Si la ligne transversale EF coupe les deux parallèles AB & CD aux points G & H , on aura
1°. Les deux angles alternes x & y égaux entr'eux.
2°. L'angle externe o est égal à l'angle y qui lui est opposé.
3°. Les deux angles internes opposés u & y font tous deux pris ensemble 180° .

Démonstration.

1°. Qu'on tire les perpendiculaires HI & GK , qui seront égales (§. 22.) les angles I & K sont aussi égaux (§. 18. 37.) Donc $x=y$ (§. 71.)

2°. $x=o$ (§. 40.) donc $y=o$ (§. 22. Arithm.)

3°. $u+o=180^\circ$. (§. 38.) donc $u+y=180^\circ$. (§. 24. Arithm.) voilà donc les trois propositions démontrées.

Théorème IX.

Pl. III.
Fig. 49.

73. Si la ligne transversale EF coupe les droites AB & CD en G & H , de façon que les deux angles x & y , ou même l'angle externe o , & l'interne y soient égaux; ou si les deux internes pris ensemble

ble font 180° ; les lignes AB & CD seront parallèles entr'elles.

Démonstration.

1°. Abaissez de G la perpendiculaire GK sur la ligne CD : faites $GI = HK$, & tirez la droite HI. Comme $x = y$, on aura $I = K$ & $HI = GK$ (§. 49.) par conséquent l'angle I sera droit (§. 37.) & AB parallèle à CD.

2°. Soit $o = y$, comme $o = x$ (§. 40.) on aura $x = y$ (§. 22. Arithm.) les lignes AB & CD seront donc parallèles entr'elles.

3°. Soit $y + u = 180^\circ$. parce que $o + u = 180^\circ$. (§. 30.) on aura $o = y$ (§. 22. & 25. Arithm.) conséquemment les lignes AB & CD seront parallèles. Voilà donc les trois propositions démontrées.

Théorème X.

74. Dans quelque triangle que ce soit, les trois angles pris ensemble font 180° . & si l'on prolonge un des côtés, l'angle externe sera égal aux deux angles internes opposés pris ensemble.

Démonstration.

Tirez par le sommet du triangle C, une parallèle DE à la base AB, vous aurez $1 = I$, & $2 = II$. Pl. II.
(§. 72.) or $1 + 3 + II = 180^\circ$. (§. 38.) donc Fig. 50.
 $1 + 3 + 2 = 180^\circ$. (§. 24. Arithm.) *Première partie du Théorème démontrée.* Si on prolonge le côté AB jusques en D, on aura $3 + 4 = 180^\circ$.
(§. 38.) Or par ce que nous venons de démon- Pl. II.
trer plus haut, $1 + 2 + 3 = 180^\circ$. Donc $3 + 4$ Fig. 51.
 $= 1 + 2 + 3$. (§. 22. Arithm. & par conséquent 4
 $= 1 + 2$. (§. 25. Arithm.) ce qui démontre la
seconde partie du Théorème.

Corollaire I.

75. Il n'y a donc qu'un seul angle droit dans quel triangle que ce puisse être, & les deux autres angles pris ensemble en font un droit, ou valent 90°. (§. 37.) & deux lignes droites perpendiculaires à l'égard d'une troisième, pourroient être prolongées jusqu'à l'infini sans jamais se rencontrer; c'est en quoi elles sont parallèles.

Corollaire II.

76. A plus forte raison ne pourra-t-il se trouver plus d'un angle obtus dans un triangle (§. 18.)

Corollaire III.

77. Si de 180° on retranche l'angle d'un triangle, la somme des deux autres reste; & si au contraire de 180°. on ôte la somme de deux angles d'un triangle, ce qui reste est la valeur du troisième.

Corollaire IV.

78. Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième de l'un fera aussi égal au troisième de l'autre. (§. 25. Arithm.)

Théorème XI.

Pl. III.
Fig. 52.

79. Dans un triangle ifocle ABC, les angles x & y formés par la base sont égaux, & la perpendiculaire CD coupera en deux parties l'angle C, la base AB, & le triangle même.

Démonstration.

Qu'on coupe en deux parties égales la droite

AB, & qu'on tire ensuite la droite DC : puisqu'on a aussi $AC=CB$ (§. 19.) on aura $x=y$, & $o=u$, $m=n$ & $\triangle ACD = \triangle CDB$ (§. 15.) & par conséquent CD perpendiculaire sur AB (§. 17.) Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

80. Ainsi dans tout triangle équilatéral, tous les angles sont égaux ; chacun vaut donc 60° . (§. 74.)

Théorème XII.

81. Si dans le triangle ABC, les angles x & y de la base AB sont égaux, les côtés AC & CB seront aussi égaux. Pl. III.
Fig. 52.

Démonstration.

Tirez la droite CD, de manière que $m=n$; & comme $x=y$, on aura aussi $o=u$ (§. 78.) donc $AC=CB$ (§. 50.)

Corollaire.

82. Si les trois angles sont donc égaux, & qu'ils valent par conséquent 60° . (§. 74.) les trois côtés seront donc aussi égaux entr'eux.

Théorème XIII.

83. L'angle du centre est double d'un angle à la circonférence, lorsque ces deux angles ont un même arc pour base.

Démonstration.

I. C A S. $o=x+u$ (§. 74.) or comme A C Pl. III.
Fig. 53.

$=CB$ (§. 27.) on aura $x=u$ (§. 79.) & par conséquent $o=u+u=2u$.

Pl. III.
Fig. 54.

II. C A s. $x=2y$ & $u=2o$, par le nombre 1. donc $x+u=2y+2o$ (§. 24. Arithm.)

Pl. III.
Fig. 55.

III C A s. $o+x=2u+2y$, & $o=2u$, par le nombre 1. donc $x=2y$ (§. 25. Arithm.) Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire I.

Pl. III.
Fig. 54.

84. La moitié de l'arc AD est donc la mesure de l'angle à la circonférence ABD, dont l'arc AD est la base; car l'arc entier AD est la mesure de l'angle du centre ACD (§. 16) Si l'angle ACB a pour base le demi-cercle ADB, ou que l'angle HBK ait pour base l'arc HIK plus grand que le demi-cercle, il est évident que le demi-arc AD est précisément la mesure de l'angle ACD, & $\frac{1}{2}$ DB de l'angle DCB, de même $\frac{1}{2}$ HI de l'angle HBI, & $\frac{1}{2}$ IK de l'angle IBK, donc $\frac{1}{2}$ ADB, ou le quart est la mesure de l'angle ACB; & $\frac{1}{2}$ HIK ou un peu plus que le quart est aussi la mesure de l'angle HBK.

Pl. III.
Fig. 57. &
59.

Fig 59.

Corollaire II.

Pl. III.]
Fig. 56.

85. Deux ou plusieurs angles ABC & ADC, terminés à la circonférence du même cercle, & qui ont le même arc AC pour base, sont égaux (§. 35.)

Corollaire III.

Pl. III.
Fig. 57.

86. Tout angle dans le demi-cercle ACB est droit: car il a le demi-cercle pour base, & le quart pour mesure. (§. 84.)

Corollaire IV.

87. Un angle à la circonférence renfermé dans

DE GEOMETRIE. 173

un cercle , est plus petit qu'un angle droit , s'il a pour base un arc plus petit que le demi-cercle ; il fera aussi plus grand qu'un angle droit , si sa base est un arc HK plus grand que le demi-cercle (§. 86.) & par conséquent il sera aigu dans le premier cas , & obtus dans le second (§. 18.)

Problème XV.

88. Examiner si une *Equerre* est juste.

Solution.

- 1°. Décrivez à volonté le demi-cercle ACB.
- 2°. Tirez de chaque extrémité du diamètre les lignes droites AC & BC à un même point de la circonférence , tel que bon vous semblera.
- 3°. Posez au point C l'angle de l'Equerre , & si ses deux côtés rasent les lignes droites AC & AB , l'Equerre est juste.

Pl. III.
Fig. 57.

Démonstration.

L'angle ACB est droit (§. 86.) si l'équerre lui est conforme , elle fera donc juste (§. 30.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème XVI.

89. Elever une perpendiculaire à l'extrémité d'une ligne.

Solution.

- 1°. Posez une jambe du compas sur un point pris à volonté , comme C , & ouvrez l'autre jusqu'en A.
- 2°. Du point C marquez la même distance D sur la ligne AB.

Pl. III.
Fig. 60.

3°. Ensuite avec une règle appliquée le long de DC, marquez encore la même distance CA de C en E.

4°. Tirez enfin la ligne droite AEF, qui sera perpendiculaire avec AB.

Démonstration.

Puisque $AC = CD = CE$, de C on peut décrire un demi cercle par les points E A D (§. 27. 36.) l'Angle A est donc droit, (§. 86.) & par conséquent la droite FA perpendiculaire à AB (§. 18.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

On peut faire la même opération avec l'équerre, comme nous l'avons vû (§. 70.

Problème XVII.

90. Diviser une ligne droite en deux parties égales.

Solution.

Pl. III.
Fig. 61.

1°. Des deux extrémités de la ligne A & B, faites à votre gré les deux intersections C & D.

2°. Tirez une droite de C à D ; elle partagera en deux également la droite A B.

Démonstration.

AC étant égal à CB, & $AD = DB$, on a $o = y$ (§. 51.) ainsi dans les triangles ACE & ECB, $AE = EB$ (§. 49.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Pl. III.
Fig. 62.

91. On peut essayer de faire la même opération mécaniquement ; c'est-à-dire en tâtonnant. Car en mettant une jambe du compas au point A, on

l'ouvre ensuite jusqu'à ce qu'on rencontre à peu près le milieu de la ligne, où on fait un petit arc. On fait la même chose de l'autre côté de la ligne B, le compas ouvert comme auparavant, & l'on voit pour lors si les deux arcs se rencontrent au même point E.

Théorème XIV.

92. Les cordes des arcs égaux AB & DE ^{Pl. III.} pris dans un même cercle, ou dans deux cercles ^{E. 58 & 53.} égaux, sont égales entr'elles, & si les cordes sont égales, les arcs le feront aussi.

Démonstration.

Tirez du centre C les rayons CA, CB, CE & CD, qui sont tous égaux entre eux. (§. 27.) Et comme les arcs AB & DE sont égaux, les angles ACB & DCE seront aussi égaux. (§. 35.) Donc aussi AB = DE.

2°. Soit AB = DE, on aura $\alpha = x$, (§. 51.) & par conséquent les arcs AB & DE seront égaux. (§. 35.)

Corollaire.

93. Si l'on divise donc la circonférence d'un cercle en tant de parties égales qu'on voudra, & qu'on tire des soutendantes, la figure aura chaque côté & chaque angle égaux; (§. 85.) la figure sera donc aussi régulière. (§. 21.)

Problème XVIII.

94. Diviser un arc en deux parties égales.

Solution.

Pl. III.
Fig. 64.

- 1°. Des extrémités de la corde AB de l'arc AEB faites les intersections à volonté en C & D.
2°. Tirez une droite de C à D, elle partagera l'arc en deux parties égales.

Démonstration.

La ligne CD coupe la corde AB en deux parties égales au point E, & forme deux angles droits au même point; (§. 90.) on a donc $AE = BE$, (§. 49.) par conséquent les arcs AE & BE sont égaux. (§. 92.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème XV.

Pl. III.
Fig. 65.

95. La perpendiculaire DA, coupant la corde EF en deux parties égales en G, passe par le centre du cercle C, & coupe en même-tems l'arc EDF en deux parties égales. Le rayon perpendiculaire abaissé du centre C sur la corde EF, coupe non seulement la corde, mais encore l'arc EDF.

Démonstration.

1°. Comme $EG = GF$, & qu'il y a deux angles droits au point G, on a $EAD = DAF$; (§. 49.) ainsi les arcs ED & DF sont égaux. (§. 84. 85.)

2°. Les cordes AE & AF étant égales, les arcs AF & EA le sont aussi; (§. 92.) par conséquent $AE + ED = AF + FD$, (§. 24. Arithm.) AD étant le diamètre du cercle, AD passe donc par le centre. (§. 13.)

3°. Si

3°. Si CG est perpendiculaire à EF , les angles du point G seront égaux. (§. 18.) Et comme $EC = CF$, (§. 27.) on aura $EG = GF$, & $ECD = DCF$; (§. 71.) par conséquent les arcs ED & DF sont égaux : (§. 35.) Voilà les trois articles démontrés.

Problème XIX.

96. Diviser un angle donné BAC en deux parties égales. Pl. III.
Fig. 66.

Solution.

1°. Ayant posé une jambe du compas sur A , marquez un point à volonté sur chaque côté de l'angle, à égale distance de A , comme D & E .

2°. De D & E , faites une intersection au point F .

3°. Tirez la droite AF , & l'angle sera divisé en deux parties égales.

Démonstration.

Puisque $AD = AE$ & $DF = EF$, & que la droite AF est commune aux deux triangles, on aura $\angle DAF = \angle EAF$. (§. 51.) Ce qu'il falloit démontrer.

Problème XX.

97. Décrire un cercle dont la circonférence touche à trois points donnés. Pl. III.
Fig. 67.

Solution.

1°. De A & B faites des intersections à volonté; comme en D & E , & tirez la droite ED .

2°. Faites de semblables intersections de B & C
M

en F & G, & tirez la droite F G, le centre du cercle fera le point H ou les deux droites se coupent mutuellement.

Démonstration.

Si de A à B, de même que de B à C on tire des lignes droites, elles feront les cordes des arcs du cercle que l'on cherche. (§. 13.) Or les lignes DE & FG coupent en deux parties égales les cordes AB & BC. (§. 90.) Chaque ligne passe donc par le centre du cercle. (§. 95.) Le centre sera par conséquent au point H, où les lignes se coupent réciproquement. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème XXI.

Pl. III. 98. Construire un quarré sur une ligne droite
Fig. 68. donnée AB.

Solution.

1°. Elevez à une de ses extrémités A une perpendiculaire qui ait la même longueur que la ligne AB. (§. 70. 89.)

2°. de B & C faites une intersection en D le compas ouvert de la longueur AB.

3°. Tirez les droites CD & DB.

Problème XXII.

Pl. III. 99. Construire un rectangle avec deux lignes
Fig. 69. données AB & BC.

Solution.

1°. Joignez par un angle droit les deux lignes AB & CB. (§. 89.)

2°. De A faites un arc en D, le compas ouvert de l'espace BC, & mettant une jambe du compas sur C, vous l'ouvrirez de l'espace BA, & ferez un second arc qui coupera le premier au point D.

3°. Tirez ensuite les lignes droites CD & DA.

Problème XXIII.

100. Ayant la droite AB avec un angle oblique, construire un rhombe. Pl. III.
Fig. 70.

Remarque.

1°. Faites l'angle donné A à l'extrémité de la ligne AB, (§. 48.) & vous aurez $AC = AB$.

2°. De C & B, avec le compas ouvert depuis A jusques à B, faites l'intersection en D.

3°. Tirez ensuite les lignes CD & BD.

Problème XXIV.

101. Ayant les deux droites AB & AC, avec l'angle oblique A, construire un rhomboïde. Pl. III.
Fig. 71.

Solution.

1°. Placez l'angle donné à l'extrémité A de la ligne AB, (§. 48.) & faites la droite AC égale à l'autre ligne donnée.

2°. De B, le compas ouvert de l'espace AC, faites un arc en D, & du point C faites un autre arc qui coupe le premier en D avec l'ouverture du compas AB.

3°. Tirez enfin les droites CD & DB.

Théorème XVI.

Pl. III.
Fig. 72.

102. La diagonale AD partage le carré, le rectangle, le rhombe & le rhomboïde en deux parties égales : les angles diagonalement opposés sont égaux, & les côtés opposés AB & CD, AC & BD sont parallèles entre eux.

Démonstration.

Dans toutes ces figures on a $AC = BD$ & $CD = AB$. (§. 20.) Les triangles ACD & ABD sont donc égaux ; de même $x = x$ & $o = o$, $u = u$, (§. 51.) & par conséquent AB est parallèle à CD, & AC à BD. (§. 73.) Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

103. Ainsi tous ces Quadrilatères sont des parallélogrammes. (§. 23.)

Problème XXV.

104. Trouver l'angle d'un Polygone régulier.

Solution.

1°. Divisez 360. par le nombre des côtés du polygone.

2°. Soustrayez de 180°. le nombre qui en vient : le reste sera le nombre des degrés qui répond à l'angle donné.

E X E M P L E.

Pl. III.
Fig. 73.

Dans l'exagone, 360 degrés divisés par 6 don-

nent 60 pour quotient, lequel soustrait de 180°, reste 120° pour l'angle ABC.

Démonstration.

Soit ABC l'angle que l'on cherche.

Décrivez un cercle par ces trois points ABC; (§. 97.) comme on a $AB = BC$, (§. 21.) les arcs AB & BC seront aussi égaux. (§. 92.) Or comme l'arc AD, moitié de l'arc ADC est la mesure de l'angle B; (§. 84.) on trouve l'arc AD, ou l'angle B en retranchant l'arc AB du demi-cercle BAD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème XXVI.

105. Trouver la somme de tous les angles de quelque polygone que ce soit.

Solution.

1°. Multipliez 180 par le nombre des côtés.

2°. Soustrayez du produit le nombre 360, le reste sera la somme des angles.

EXEMPLE.

Pour le Pentagone.

Pour l'Exagone.

$$\begin{array}{r} 180 \\ 5 \\ \hline 900 \\ 360 \\ \hline 540 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ 6 \\ \hline 1080 \\ 360 \\ \hline 720 \end{array}$$

Démonstration.

Pl. III.
Fig. 74.

D'un point pris dans quelque polygone que ce puisse être, on pourra faire de ce polygone autant de triangles qu'il aura de côtez. Si l'on multiplie donc 180 par le nombre des côtes du polygone, le produit fera la somme des angles de tous les triangles. (§. 74.)

Or tous les angles qui sont autour du centre F & qui n'appartiennent pas aux angles du polygone, font toujours 360°. (§. 42.)

Si l'on retranche donc du produit trouvé la somme 360, le restz sera la somme des angles du polygone. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème XXVII.

106. Décrire un polygone régulier, la droite AB étant donnée.

Solution.

Pl. IV.
Fig. 75.

Faites à chacune des extrémités A B des angles égaux, chacun en particulier à la moitié de l'angle du polygone; de cette façon les côtes du triangle isocèle ABC se couperont mutuellement au centre du cercle C.

2°. Du point C prenez avec un compas la longueur de CA pour servir de rayon au cercle, dont vous décrivez la circonférence, que vous ferez passer par les deux points A B. Vous diviserez ensuite cette circonférence en autant de longueurs de la ligne donnée que vous pourrez.

Remarque.

On trouve dans les étuis de Mathématiques, un

demi-cercle gradué, c'est-à-dire, divisé en ses 180° . & par le moyen de ce demi-cercle on décrit aisément un angle de tel nombre de degrés que l'on veut.

Problème XXVIII.

107. Décrire un polygone régulier dans un cercle donné.

Solution.

1°. Divisez 360 par le nombre des côtés du polygone demandé afin d'avoir la quantité de l'angle ACB. Pl. IV. Fig. 76.

2°. Transportez cet angle au centre du cercle C, (§. 48.) & vous aurez le côté du polygone AB, que vous appliquerez sur la circonférence autant de fois que faire se pourra.

Théorème XVII.

108. Le côté de l'exagone AB est égal au rayon du cercle AC. Fig. 76.

Démonstration.

L'angle ACB est de 60° . (§. 107.) les autres A & B font donc de 120° . (§. 77.)

Or $AC = BC$, (§. 27.) on aura donc aussi $A = B$; (§. 79.) & par conséquent chacun étant de 60° . sera égal à l'angle C. AB fera donc égal à AC. (§. 82.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

109. On décrira donc un exagone régulier dans un cercle, si on le divise par son rayon.

M iiii

Corollaire II.

110. Si l'on veut construire un exagone sur une ligne donnée : il suffira d'y faire un triangle équilatéral. (§. 53.) car le sommet C est le centre du cercle dont la circonférence doit passer par les angles qui forment les côtés de l'exagone.

Problème XXIX.

Pl. IV.
Fig. 77. 111. Construire une figure dont on donne tous les côtés, & autant de diagonales qu'il y a de côtés exceptez trois.

Solution.

Toute figure se réduisant par le moyen des diagonales, en autant de triangles qu'elle a de côtés, si on en excepte deux, il suffira de construire un triangle sur un autre. (§. 55.)

Problème XXX.

112. Construire une figure dont on a tous les côtés, & autant d'angles qu'il y a de côtés, exceptez trois.

Solution

Pl. IV.
Fig. 78.

1°. Tirez la droite AB égale à un des côtés donnés ; aux deux extrémités A & B formez les angles requis A & B, (§. 48.) auxquels vous appliquerez les côtés AE & BC.

2°. Si l'on fait en E un angle convenable, on pourra appliquer le côté ED, & tirer ensuite la droite DC.

3°. Ou bien on fera en D un intersection des

points E & C, & pour lors on aura la figure que l'on demande.

Remarque.

113. Si l'on donne tous les angles excepté un, il n'est pas nécessaire que l'on donne deux côtés.

Problème XXXI.

114. Trouver l'aire d'un quarré.

Solution.

Mesurez un côté & multipliez la longueur par elle-même, vous trouverez dans le produit l'aire du quarré.

EXEMPLE.

Soit le côté du quarré.

$$\begin{array}{r}
 345'' \\
 345 \\
 \hline
 1725 \\
 1380 \\
 1035 \\
 \hline
 \text{L'aire fera } 119025''
 \end{array}$$

Démonstration.

Pour mesurer une superficie, il faut prendre la superficie elle-même pour mesure. Et comme le quarré a tous les angles droits & les côtés égaux, on peut bien prendre le quarré lui-même. Si l'on divise donc le côté AB, en quatre parties égales, ou qu'il contienne 4 pieds, il est évident qu'on

Pl. IV.
Fig. 72.

trouvera le nombre des pieds quarrés contenus dans le grand quarré ABCD, si on multiplie ce côté par lui-même ; car on trouve dans chaque tranche du grand quarré autant de petits que le côté AB a de divisions.

Corollaire I.

115. Si le côté du quarré est divisé en dix parties, l'aire du quarré en aura 100. Et comme une toise se mesureroit en long par dix pieds, si elle étoit composée de dix, le pied par dix pouces &c. la toise de dix pieds quarrée contiendrait 100 pieds de superficie, le pied quarré 100 pouces &c.

Corollaire II.

116. Un nombre donné se diviseroit alors facilement en pouces, pieds & toises quarrées ; à sçavoir en assignant de la droite à la gauche deux chiffres pour les toises, deux pour les pieds, deux pour les pouces &c.

Exemple. 119025 pouces, feroient 11 toises 90 pieds & 25 pouces.

Problème XXXII.

117. Trouver l'aire d'un rectangle.

Solution.

PL IV.
Fig. 80.

1°. Mesurez la largeur AB, & la hauteur BC.
2°. Multipliez la premiere par la seconde, le produit sera l'aire de la figure rectangulaire.

E X E M P L E.

Soit $AB = 3^{\circ} 4^1 5''$
 $AD = 1 \quad 2 \quad 3$

$$\begin{array}{r}
 10 \quad 3 \quad 5 \\
 69 \quad 0 \\
 345 \\
 \hline
 4^{\circ} 24^1 35''
 \end{array}$$

Démonstration.

C'est la même que celle du Problème précédent.

Théorème XVIII.

118. Deux parallelogrammes $ABCD$, & $EFDC$, qui ont la même base & la même hauteur, Fig. 21. sont égaux entre eux.

Démonstration.

AC étant égal à BD , $EC = FD$ & $AE = BF$, (§. 20.) & (§. 24. Arithm.) $\triangle AEC = \triangle BFD$; (§. 51.) donc si l'on ôte de l'un & l'autre le triangle BEG , $ABGC = EGDF$; (§. 25 Arithm.) mais si l'on ajoûte à l'un & à l'autre le triangle CDG , on aura aussi $ABDC = EFCD$. (§. 24 Arithm.) *Ce qu'on avoit à démontrer.*

Corollaire I.

119. Les triangles qui ont la même base & la même hauteur sont donc égaux.

Corollaire II

120. Le triangle est donc la moitié du parallélogramme qui a la même ou une base semblable, & qui est entre les deux mêmes parallèles. (§. 22.)

Problème XXXIII.

121. Trouver l'aire d'un rhombe & d'un rhomboïde.

Solution.

Pl. IV.
Fig. 32.

1°. Ayant pris pour base le côté AB, abaissez deffins la perpendiculaire CE. (§. 69.)

2°. Multipliez la base AB par la hauteur CE; le produit sera l'aire que l'on cherche.

E X E M P L E.

Soit $AB = 456''$

$CE = 234$

$$\begin{array}{r}
 456 \\
 \times 234 \\
 \hline
 1824 \\
 13680 \\
 91200 \\
 \hline
 106704
 \end{array}$$

Démonstration.

Le rhombe ou rhomboïde ABDC est égal au rectangle, dont la base seroit AB, & la hauteur CE; (§. 118. 103) or on trouve l'aire d'un rectangle si l'on multiplie AB par CE: (§. 117.) on trouve donc aussi l'aire d'un rhombe ou rhomboïde, en multipliant AB par CE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème XXXIV.

122. Trouver l'aire d'un triangle.

Solution.

- 1°. Abaissez la perpendiculaire CD sur le côté AB que vous aurez choisi pour base. (§. 69.) Pl. IV:
Fig. 83;
- 2°. Cherchez quelle est la longueur des lignes AB & CD, & multipliez-les l'une par l'autre.
- 3°. Divisez le produit par deux, & vous aurez l'aire du triangle.

Démonstration.

En multipliant AB par CD, le produit sera l'aire du parallelogramme dont les côtés sont AB & CD. (§. 117. 121.)

Or comme le triangle est la moitié du parallelogramme, (§. 120.) il faut donc partager en deux l'aire trouvée pour avoir l'aire du triangle. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autrement.

Multipliez la base AB par la moitié de la hauteur CD, ou la hauteur CD par la moitié de la base AB. Le produit sera l'aire, du Δ comme il paroît par l'exemple suivant.

$$\begin{array}{lll} AB=3^{\circ} 4' 2'' & AB=3^{\circ} 4' 2'' \frac{1}{2} & AB=1^{\circ} 7' 1'' \\ CD=234 \frac{1}{2} & CD=117 & CD=234 \end{array}$$

$\begin{array}{r} 1368 \\ 1026 \\ 684 \\ \hline 80028. \\ 2) \hline 40014. \text{ ACB.} \end{array}$	$\begin{array}{r} 2394 \\ 342 \\ 342 \\ \hline 40014. \text{ ACB} \end{array}$	$\begin{array}{r} 684 \\ 513 \\ 342 \\ \hline 40014 \text{ ACB} \end{array}$
--	--	--

Problème XXXV.

123. Trouver l'aire de quelque figure rectiligne que ce soit.

Solution.

Pl. IV.
Fig. 34.

Comme toute figure, de l'angle B par les diagonales BE, BD, se réduit en autant de triangles qu'elle a de côtés, excepté deux, par exemple, le pentagone ABCDE est réduit en trois triangles ABE, BED & BCD; qu'on cherche donc l'aire de chaque triangle, selon le problème précédent, & qu'on fasse ensuite l'addition de ces trois aires, on aura celle du pentagone.

Ou si l'on abaisse les deux perpendiculaires CF & EG sur la même base BD, on trouvera l'aire du trapeze par une seule opération, en multipliant la moitié de la base BD par la somme des hauteurs EG & CF, ou la base entière par la moitié des hauteurs.

E X E M P L E.

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{2} BD = 4^{\circ} 31' \quad \frac{1}{2} BD = 4^{\circ} 3' \quad \frac{1}{2} EB = 4^{\circ} 2' \\
 CF = 35 \quad EG = 45 \quad AH = 30' \\
 \hline
 215 \quad 215 \quad \triangle AEB \ 1260' \\
 129 \quad 172 \\
 \hline
 B \ CD \ 1505 \quad \triangle EBD \ 1935 \\
 \quad \quad \triangle AEB \ 1260 \\
 \quad \quad \triangle BCD \ 1505
 \end{array}$$

Aire de la figure = 4700

Corollaire I.

124. Du centre d'un cercle décrit autour d'un pl. IV.
polygone régulier, on réduit ce polygone en autant Fig. 85.
de triangles égaux qu'il a de côtés : car les bases
de ces triangles AB, BE, EF &c. (§. 21.) &
leurs côtés AC, CB, CE, CF, CG sont égaux
entr'eux. (§. 27.) Donc les triangles sont égaux
entre eux. (§. 51.)

Or si l'on trouve l'aire d'un de ces triangles,
(§. 122) & qu'on la multiplie par le nombre des
côtés du polygone, il est évident qu'on aura dans
le produit l'aire du polygone régulier.

E X E M P L E.

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{2} AB = 2^{\circ} 7' \\
 DC = 2 \ 9 \\
 \hline
 243 \\
 54 \\
 \hline
 \triangle ABC \ 783 \\
 \quad \quad 5 \text{ nombre des côtés}
 \end{array}$$

Aire du pentagone = 39° 15'

Corollaire II.

Pl. IV.
Fig. 86.

125. On voit donc aussi qu'un polygone régulier est égal à un triangle, dont la base est égale à la circonférence de tout le polygone, & la hauteur égale à la perpendiculaire CD abaissée du centre C sur le côté AB (§. 119.)

Corollaire III.

126. Si l'on vouloit faire dans un cercle un polygone dont les côtés fussent infiniment petits, ils ne laisseroient pas de se trouver renfermés dans la circonférence de ce cercle, & pour lors la hauteur du triangle CD aura du rapport avec le rayon BC; ainsi un cercle seroit égal à un triangle dont la base est égale à la circonférence du cercle, & la hauteur au rayon (§. 125.)

Corollaire IV.

Pl. IV.
Fig. 87.

127. Donc le *Secteur* d'un cercle ACB est égal à un triangle, dont la base est l'arc AB, & la hauteur le rayon AC.

Corollaire V.

128. Ayant donc la circonférence & le diamètre d'un cercle, on trouve l'aire de ce même cercle, en multipliant sa circonférence par la quatrième partie de son diamètre.

Remarque.

129. On a vu dans tous les siècles bien de gens rechercher à l'envie, & prendre une peine infinie pour

pour trouver le véritable rapport du diamètre d'un cercle à sa circonférence: en vain y ont-ils consacré la plupart de leurs veilles; ils n'ont pu réussir jusqu'ici, quoique les Mathématiques soient aujourd'hui infiniment perfectionnées. Quelques-uns cependant ont essayé assez heureusement de déterminer ce rapport par approximation. Archimede dans son traité de la dimension du cercle, proposition seconde, a démontré le premier, que le rapport du diamètre à la circonférence est presque le même que celui de 7 à 22; mais comme ce rapport pèche infiniment par excès dans les grands cercles, d'autres en ont voulu déterminer un plus exact. Personne n'y a plus travaillé que Ludolphe de Ceulen ou de Cologne, qui enfin a trouvé que supposant le diamètre d'un cercle de 100 000 000 000 000 000 000, sa circonférence est de 314 159 265 358 979 323 846, peu s'en faut.

Mais comme ces chiffres sont en trop grand nombre, & font une somme trop considérable pour s'en servir à faire un calcul, on prend seulement les trois premiers caracteres de chaque somme, & l'on suppose le rapport du diamètre à la circonférence, comme 100 à 314: en quoi s'accordent Ptolomée, Viète, Huyghens, & Ludolphe de Ceulen. La proportion qu'a donné Adrien Métius est la plus exacte de toutes celles qui ont paru exprimées en nombres peu étendus, elle est, comme 113 à 355. Nous en donnerons la démonstration dans la Trigonométrie.

On conçoit aisément que tous les diamètres ont le même rapport avec leurs circonférences; car si ce rapport étoit différent selon la diversité des cercles, cette différence suffiroit pour les faire distinguer les uns d'avec les autres; ils ne seroient donc

pas tous semblables entr'eux, contre ce que nous avons démontré cy-dessus (§. 34.)

Théorème XIX.

130. L'aire d'un cercle est au quarré de son diamètre comme 785 à 1000, ou peu s'en faut.

Démonstration.

Le diamètre supposé de 100 parties, la circonférence sera de 314 (§. 129.) ainsi l'aire du cercle de 7850 (§. 128) & le quarré du diamètre 10000 (§. 114.) par conséquent l'aire sera au quarré comme 7850 à 10000, & en divisant les deux sommes par dix, l'aire sera comme 785 à 1000 (§. 59. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème XX.

131. Les aires des cercles sont entr'elles comme les quarrés des diamètres sont entr'eux.

Démonstration.

L'aire d'un cercle est au quarré de son diamètre, comme l'aire d'un autre cercle est au quarré de son propre diamètre (§. 129. 130) l'aire d'un cercle sera donc à l'égard de l'aire d'un autre cercle, comme le quarré du diamètre de l'un est au quarré du diamètre de l'autre (§. 83. Arith.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème XXXVI.

132. Le diamètre d'un cercle étant connu, trouver sa circonférence.

Solution.

Cherchez un quatrième nombre proportionnel à 100, 314, & au diamètre donné : (§. 85. Arithm.) ce nombre trouvé sera la circonférence que l'on cherche. (§. 129.)

Soit par exemple le diamètre 56'.

$$100 - 314 - 56$$

$$\underline{56}$$

$$1884$$

$$\underline{1570}$$

$$17^{\circ}5'8''4''' \text{ Circonférence du cercle.}$$

Problème XXXVII.

133. Ayant la circonférence d'un cercle (17584''') trouver son diamètre.

Solution.

Cherchez un quatrième nombre proportionnel à 314, 100, & à la circonférence 17584''' (§. 85. Arithm.) on trouvera 56 qui est le diamètre que l'on cherche.

EXEMPLE.

$$314 - 100 - 17584$$

$$\underline{100}$$

$$1758400$$

$$18$$

$$202$$

$$1758400 - 5^{\circ}6'0''0''' \text{ diamètre.}$$

$$314444$$

$$3111$$

$$33$$

N ij

Probleme XXXVIII.

134. La circonférence d'un cercle étant connue ,
ou son diamètre , trouver l'aire de ce cercle.

Solution.

1°. Cherchez la circonférence (§. 132) ou son diamètre (§. 133.)

2°. Multipliez la circonférence trouvée par la quatrième partie du diamètre (§. 128.)

Soit par exemple le diamètre 5600^m, la circonférence sera 17584^m, & par conséquent l'aire du cercle 24617600^m.

Autrement.

Multipliez le diamètre 56' par lui-même , & cherchez un quatrième nombre proportionnel 246176" (§. 85. Arithm.) à 1000, 785, & le quarré trouvé du diamètre 3136; & vous aurez l'aire que vous demandez) (§. 130)

Problème XXXIX.

135. Ayant l'aire d'un cercle , trouver son diamètre.

Solution.

1°. Cherchez un quatrième nombre proportionnel 313600 (§. 85 Arithm.) à 785, 1000 & à l'aire donnée 246176.

2°. Extrayez ensuite la racine quarrée 560. (§. 77. Arithm.) cette racine extraite fera le diamètre cherché (§. 130.)

Corollaire.

136. Si-tôt qu'on connoîtra le diamètre d'un cercle, on connoîtra aussi sa circonférence, par le Problème 36. (§. 132.)

Problème XL.

137. Ayant le rayon du cercle, AC, (6') avec la grandeur de l'arc AB, (6°.) trouver l'aire du Secteur ABC. Pl. IV.
Fig. 87.

Solution.

1°. Cherchez un quatrième nombre proportionnel 1884^m (§. 85. Arithm.) à 100, 314, & au rayon du cercle AC. Ce nombre trouvé est la moitié de la circonférence (§. 132. Géom.) & (§. 59. Arithm.)

2°. Cherchez ensuite un quatrième nombre proportionnel $62\frac{4}{5}$ (§. 85. Arithm.) à 180°, à l'arc donné 6°, & à la moitié de la circonférence trouvée 1884^m . Ce nombre proportionnel donnera dans les lignes l'arc AB.

3°. Multipliez ce nombre par la moitié du rayon 300^m , le produit exprimera l'aire du secteur ABC 18840^m (§. 122. 127.)

Théorème XXI.

138. Les deux parallélogrammes ABDC & BEFD de même hauteur AC, sont entr'eux, comme sont les bases CD & DF : & si les bases sont égales, ils feront entr'eux comme les hauteurs sont entr'elles. Pl. IV.
Fig. 88.

Démonstration.

On a l'aire du parallélogramme AD en multi-
N iij

pliant sa base CD par AC ; & l'aire du parallélogramme BF , si l'on multiplie sa base DF par AC (§. 117.) Ainsi ces deux parallélogrammes sont entr'eux comme les produits de AC par CD , & de AC par DF , c'est-à-dire, comme CD à DF (§. 59. Arithm.) *Première partie du Théorème qu'il falloit démontrer.*

On démontre de la même manière, que les parallélogrammes, dont les bases sont égales, sont entr'eux comme leurs hauteurs sont entr'elles.

Corollaire.

139. Tout triangle pouvant être considéré comme la moitié d'un parallélogramme (§. 120) les triangles de même hauteur seront entr'eux comme leurs bases ; & ceux qui auront les mêmes bases, seront en même raison que leurs hauteurs.

Problème XLI.

Pl. V.

Fig. 82.

140. Diviser le parallélogramme $ABEC$ en deux parties égales, en tirant une ligne droite du point donné D .

Solution.

Faites $EF = AD$, & tirez la droite DF , vous aurez les Trapèzes $ADFC$ & $DBEF$ égaux entr'eux.

Démonstration.

Les triangles ABC & BCE sont égaux (§. 102.) & comme AB est égal & parallèle à EC (§. 102.) & $EF = AD$, on voit que $o = x, y = u$ (§. 72.) & $FC = DB$ (§. 25. Arithm.) donc le $\triangle DBG = \triangle GCF$ (§. 50.) & par conséquent le Trapèze

ACFD est égal au Trapèze DFEB. (§. 24. 25. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème XLII.

141. L'aire d'un triangle ($36'$) avec sa base ($18'$) étant connues, trouver sa hauteur.

Solution.

Divisez l'aire du triangle ($36'$) par la moitié de sa base, le quotient ($4'$) sera sa hauteur (§. 122.)

Problème XLIII.

142. Diviser une figure rectiligne en tant de parties égales qu'on voudra.

Pl. IV.
Fig. 90.

Solution & démonstration.

1°. Cherchez quelle est l'aire de la figure (§. 123) & divisez-la en autant de parties égales que la figure même peut être divisée, par exemple, en trois.

2°. Soustrayez l'aire du triangle AED de la troisième partie, & partagez le reste par $\frac{1}{2}AD$, le quotient sera la hauteur du triangle ADI qu'il faudra ajouter au premier AED, pour avoir la troisième partie AEDI de la figure. (§. 141.)

3°. Tirez de l'étendue de la hauteur une parallèle à AD (§. 67.) qui coupera AB au point I : duquel point trouvé vous pourrez tirer la droite DI.

4°. Divisez la moitié de la troisième partie par $\frac{1}{2}DI$, le quotient sera la hauteur du triangle DIK qui fait la sixième partie de la figure.

5°. Tirez une parallèle à ID égale à la hauteur de ce triangle, pour avoir le point K.

N iiij

6°. Divisez la fixième partie de toute la figure par $\frac{1}{2}$ DK & de l'intervale du quotient vous tirerez une parallele à DK pour avoir le point L, & pouvoir tirer la droite KL qui coupera l'autre partie DIKL, & déterminera en même tems la troisième LKBC.

E X E M P L E.

Soit AD 516", AC 580", EH 154", BG 315", DF 375", AED 39732", ABC 91350", ADC 108750", ainsi l'aire entière sera 239832", la troisième partie 79944", la fixième 39972", la hauteur du $\triangle DIA$ 156", du $\triangle DIK$ 151" & du $\triangle DKL$ 139".

Remarque.

143. Ayant fait la division sur le papier, il est très-facile de déterminer sur un terrain les points I, K & L par la quantité des droites AI, IK & DL.

Théorème XXII.

Pl. IV.
Fig. 91.

144. Dans le triangle rectangle ABC, le quarré ACFG du plus grand côté AC, est égal à la somme des quarrés BCED, & ABIH des deux autres côtés BC & AB.

Démonstration.

Tirez les droites AE & BF, & BK parallele à AG (§. 67.) Le triangle BCF étant appuyé sur la même base CF que le rectangle LCFK, & entre les mêmes paralleles CF & BK, il fera la moitié de ce rectangle (§. 120.) On raisonne de la même façon sur le triangle ACE, qui fera la moitié du quarré BCED, parce que ACE se trouve sur la même base CE que BCED, & entre les mêmes paralleles AD & CE (§. 120.)

Or $CF = AC$, & $BC = CE$ (§. 20.) & l'angle ACE est égal à l'angle BCF (§. 24. Arithm.) parce que $ACF = BCE = 90^\circ$ (§. 20. 37.) donc les triangles ACE & BCF sont égaux (§. 49.) & par conséquent le quarré $BDEC$ sera aussi égal au rectangle $LCFK$ (§. 26 Arithm.)

Et comme on démontre par la même méthode, que le quarré $AHIB$ est égal au rectangle $ALKG$, il est évident que les quarrés $AHIB$ & $BCDE$ pris ensemble équivalent le quarré $AGFC$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

145. On nomme *Théorème de Pythagore*, le Théorème cy-dessus, parce qu'on croit qu'il en est l'inventeur. Quelques-uns l'appellent le *Maître des Mathématiques*, à cause du grand usage qu'on en fait dans toutes les parties qui composent les Mathématiques.

Problème XLIV.

146. Construire un quarré égal à deux ou plusieurs pris ensemble.

Solution.

Pl. IV:
Fig. 92.

1°. Joignez à angles droits les côtés de deux quarrés AB & BC (§. 70. 89.)

2°. Tirez la ligne droite AC , qui sera le côté d'un quarré égal aux deux autres pris ensemble (§. 144.)

3°. Elevez avec une équerre sur le côté du troisième quarré CD , la ligne $CE = CA$.

4°. Tirez la droite DE qui sera le côté d'un quarré égal aux trois autres pris ensemble (§. 144.)

Théorème XXIII.

147. Si les angles homologues d'une figure rec-

tiligne sont égaux, & que les droites qui les séparent aient de part & d'autre le même rapport, les figures sont semblables: & si les figures sont semblables, les angles & les côtés seront comme nous venons de dire.

Démonstration.

Les figures rectilignes ne se distinguent que par la grandeur de leurs angles homologues, & le rapport qu'ont entr'eux les côtés qui les séparent; car on n'y connoît que cela distinctement. Si les angles sont donc égaux, & que les côtés aient entr'eux le même rapport, on y voit précisément ce par quoi on les distingue. Ils sont par conséquent semblables. (§. 4.)

Si deux figures sont semblables, on y remarque ce qui les fait distinguer: or on ne distingue les figures rectilignes que par la quantité de leurs angles homologues, & par le rapport que les côtés ont entr'eux; la grandeur des angles & le rapport des côtés doivent donc être les mêmes de part & d'autre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème XXIV.

Pl. IV.
Fig. 93.

148. Si dans les deux triangles BAC & DFE, B est égal à D & $C = E$, on aura $BA : AC = DF : FE$ & $AB : BC = FD : DE$; & si les côtés sont proportionnels, les angles homologues seront aussi égaux.

Démonstration.

Comme $B = D$ & $C = E$, & que de deux angles donnés avec un côté on peut construire un triangle (§. 60.); les triangles BAC & DFE se font de la même manière; ils sont donc sembla-

bles (§. 33.) par conséquent $BA : AC = FD : FE$ & $AB : BC = FD : DE$ (§. 147.) *premiere partie démontrée.*

Dans la seconde, les trois côtés d'un triangle sont proportionnels aux trois côtés de l'autre, & de ces trois côtés on peut former un triangle (§. 55.) les triangles ABC & DFE se faisant par la même méthode, sont donc semblables (§. 33.) par conséquent leurs angles homologues sont égaux (§. 147.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème XXV.

149. Si dans le triangle ABC on tire la droite DE parallèle à la base BC, AD sera à AE, comme AB à AC, & ce que BD est à EC, $AD : DE = AB : BC$. Pl. IV.
Fig. 93.

Démonstration.

DE étant parallèle à BC, $o = x$ & $u = y$ (§. 72.) de là $AD : AE = AB : AC$, & $AD : DE = AB : BC$, (§. 148 ;) par conséquent parce que $AD : AB = AE : AC$ (§. 83. Arithm.) $AD : AE = BD : EC$. *Ce qu'il falloir démontrer.*

Problème XLV.

150. Trouver une troisième proportionnelle à deux lignes données AB & AC. Pl. IV.
Fig. 94.

Solution.

1°. Faites à volonté l'angle EAD, & transportés la ligne AC de A en C; & de A en B, aussi bien que du point C transportés en E la ligne AB.

2°. De C en B, tirez la droite CB, & de E

en D la droite DE parallèle à CB ; si l'on fait donc l'angle E égal à l'angle C (§. 8.) (§. 73) ; BD fera la troisième proportionnelle que l'on cherche.

Problème XLVI.

Pl. IV.
Fig. 95.

151. Trouver une quatrième proportionnelle aux trois lignes données AB, AC, & BD.

Solution.

- 1°. Formez à volonté l'angle EAD.
- 2°. Transportez la ligne AB de A en B, la ligne AC de A en C ; & de B en D la ligne BD.
- 3°. Tirez de B à C la droite marquée BC.
- 4°. De D tirez l'autre droite DE parallèle à BC, comme dans le Problème précédent, & CE fera la quatrième ligne proportionnelle (§. 149.)

Théorème XXVI.

Pl. V.
Fig. 93.

152. Si dans les deux triangles ABC & FDE, B est égal à D & $AB : BC = FD : DE$, A sera aussi égal à F & $C = E$, & $BA : AC = DF : FE$.

Démonstration.

Puisque $B = D$ & $AB : BC = FD : DE$, & que de deux côtés réunis par un angle on peut former un triangle (§. 58 ;) les triangles ABC & FDE se faisant par la même méthode, sont semblables (§. 33) ; par conséquent $A = F$, $C = E$ & $BA : AC = DF : FE$ (§. 147.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

153. Les Théorèmes sur la ressemblance &

l'égalité des triangles font. d'une très-grande utilité dans les Mathématiques. Ils font trouver quantité de choses, particulièrement quand il s'agit de pratiquer la Géométrie sur un terrain; car presque toute cette pratique est fondée sur ces principes, comme on le verra dans la suite.

Problème XLVII.

154. Diviser une ligne droite donnée en autant de parties qu'on voudra.

Pl. V.
Fig. 96.

Solution.

1°. Tirez la droite CD longue à volonté, & transportés-y autant de parties égales que vous en devez trouver dans la ligne donnée, par Exemple cinq.

2°. Construisez sur CD un triangle équilatéral CED (§. 53.)

3°. Transportez de E en A & E en B la ligne donnée à diviser, & tirez la droite AB qui sera la ligne donnée.

4°. Tirez enfin des droites du sommet de l'angle à chaque point de division de la ligne CD, & AF sera la cinquième partie de la ligne donnée AB.

Démonstration.

Puisque $EA : EB = EC : ED$, on a $A = C$ & $EA : AB = EC : CD$ (152.) Or $EC = CD$: donc $EA = AB$; par conséquent $AB =$ à la ligne donnée. Comme donc $EA : AF = CD : CG$ (§. 148), c'est-à-dire, $AB : AF = CD : CG$, & $CG = \frac{1}{5} CD$, on aura aussi $AF = \frac{1}{5} AB$ (§. 53. Arithm.) Ce qu'il falloit démontrer.

Autre Démonstration.

Le triangle CED peut être considéré comme renfermé dans un cercle dont le centre seroit E, & le triangle AEB peut être aussi considéré comme renfermé dans un plus petit cercle concentrique au grand. Et comme tous les rayons partis du centre diviseroient nécessairement la circonférence du cercle concentrique en autant de parties que la circonférence du grand cercle, il est évident que le petit triangle AEB est divisé par les rayons partis du centre, en autant de parties que le triangle CED; par conséquent la ligne donnée AB est divisée en cinq parties égales, parce que la ligne CD est divisée également en autant de parties. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème XLVIII.

Pl. V.
Fig. 97.

155. Couper une ligne droite donnée en même proportion qu'une autre CD a été coupée.

Solution.

1°. Formez un triangle équilatéral sur la ligne coupée CD (§. 53.)

2°. Transportez la ligne donnée de E en A & B, tirez ensuite la droite AB qui sera égale à la ligne donnée.

3°. Tirez du sommet du triangle E, des lignes droites aux points de division G, I. Ces lignes couperont la ligne AB en proportion requise.

Démonstration.

Elle est la même que celle du Problème précédent.

Remarque.

156. Le Problème précédent est d'un très-grand usage tant dans l'architecture militaire que civile, particulièrement quand il s'agit d'agrandir ou de diminuer un plan.

Problème XLIX.

157. Diviser un parallélogramme ou un triangle en autant de parties égales qu'on voudra. Pl. VI.
Fig. 109.
& Pl. VII.
Fig. 110.

Solution.

1°. Divisez la base CD ou CB en autant de parties que la figure doit être divisée (§. 154.)

2°. Si c'est un parallélogramme, tirez de chaque point de division 1. 2. des parallèles au côté AC. Fig. 109.

1, 1. 2, 2. (§. 67.) si c'est un triangle, tirez des droites des points de division 1. 2 au sommet A, & chaque figure sera divisée en parties égales. (§. 138. 139.) Fig. 110.

Problème L.

158. Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données AB & BE. Pl. VII.
Fig. 111.

Solution.

1°. Joignez en ligne droite & bout-à-bout, les deux lignes données, & divisez leur longueur commune AE en deux parties égales au point C (§. 90.)

2°. De C comme centre décrivez un demi-cercle dont le diamètre soit AE.

3°. Au point B élevez la perpendiculaire BD

(§. 70.) qui fera la moyenne proportionnelle demandée

Démonstration.

L'angle ADE est droit (§. 86.) ABD est aussi un angle droit (§. 18.) l'angle DAB est commun aux deux triangles DAB & DAE. L'angle DAE est donc égal à l'angle DEB (§. 78.) Or dans le triangle DEB, l'angle DBE est aussi droit (§. 18) AB est donc à BD comme BD à BE (§. 148)
Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque première.

159. Si l'on prenoit une ligne pour une unité , & qu'on exprimât un nombre donné par une autre ligne , on pourroit en extraire facilement la racine quarrée , en se servant de l'échelle géométrique , & de la méthode qu'on a employé dans le problème ci-dessus. (§. 74. Arithm.)

Remarque seconde.

160. On peut faire aussi la règle de trois par le moyen des lignes , en suivant ce que nous avons dit au Problème 46. (151.)

Problème L I.

Pl. VII.
Fig. 112.

161. La corde d'un arc AB , & sa hauteur DF étant données , trouver le diamètre ED , & par conséquent le centre du cercle C.

Solution & Démonstration.

1°. Cherchez une troisième proportionnelle à FD & FB (§. 85. Arithm.) pour avoir EF (§. 158.)

2°.

DE GEOMETRIE. 209

2°. Ajoutez à EF la hauteur de l'arc DF, & vous aurez le diamètre ED.

3°. Coupez le diamètre en deux parties égales pour avoir le rayon EC qui donne le centre.

E X E M P L E.

Soit DF 8^l 3^{ll} FB 1° 6^l 6^{ll}.

83 — 166 — 166	
166	1
996	22
996	366
166	27886
27556	8333
	88

{	332 ⁿ	EF
	83	DF
	415 ⁿ	ED
2)	2075 ^m	EC

Remarque.

162. Ce problème est en usage dans l'Architecture civile, quand il s'agit de faire des portes & des fenêtres en forme d'arc.

Problème LII.

163. Ayant la corde d'un arc AB avec sa hauteur DF, trouver l'aire du segment ADBFA. Pl. VII: Fig. 112.

Solution.

1°. Cherchez d'abord le diamètre DE, (§. 161.) décrivez ensuite le cercle, auquel vous appliquerez la corde AB.

2°. Mesurez avec le rapporteur l'angle ACB. (§. 43.)

Tome I.

O

4°. De la corde donnée AB & de la différence FC qui se trouve entre la hauteur de l'arc FD & le rayon DC, cherchez l'aire du triangle ABC. (§. 122.)

5°. Soustrayez enfin le triangle ACB du secteur ACBDA, le reste sera le segment ADBFA. Soit pour exemple.

AB 600^m, DF 80^m; DE sera 1205^m, l'arc AB 60°, l'aire du secteur ACBDA sera donc 189630^m. Or comme FC 522^m, AF 300^m, le Δ ACB sera 156600^m & par conséquent le segment AFBDA 33030^m.

Problème LIII.

164. Construire l'échelle géométrique.

Pl. V.
Fig. 98.

Règle.

1°. Tirez la droite AE, * transportez sur cette ligne dix parties égales prises à volonté, en commençant depuis A, la dixième sera B. Vous prendrez ensuite la distance AB que vous transporterez de B en E autant de fois qu'il vous plaira.

2°. Elevez au point A la perpendiculaire AC, que vous diviserez aussi en dix parties égales & arbitraires. (§. 70.)

3°. De chaque point de division menez des parallèles à AE, (§. 67.) & sur la dernière CF, vous transporterez de C en D les dix parties égales AB.

4°. Joignez par des lignes droites la première partie à gauche marquée 10 avec la seconde à droite marquée 9, puis 9 de la gauche avec 8 de la droite, ensuite 8, de la gauche avec 7 de la droite, & ainsi de suite comme la figure le marque.

Il est évident que si AB est supposé être une lon-

gueur de dix pieds, les parties B 1 ; 1, 2 ; 2, 3 ; &c. feront des pieds. A l'égard des petits chiffres qui font au haut de la figure, sur les divisions perpendiculaires, ⁹, ⁹ vaudra un pouce ; ⁸, ⁸ deux pouces ; ⁷, ⁷ trois ; ⁶, ⁶ quatre pouces, &c.

Démonstration.

Dix pieds, ou si l'on veut dix parties font la mesure Géométrique. (§. 10) Il est donc clair que les parties de la droite AB sont des pieds. On démontre ainsi que ⁹, ⁹ font un pouce, ⁸, ⁸ deux ; ⁷, ⁷ trois ; &c. ⁹, ⁹ est parallèle à C 9 : comme A 9 est à AC, ainsi sera ⁹, ⁹ à C 9. (§. 149.) Or comme $A 9 = \frac{1}{10} AC$, on aura donc ⁹, ⁹ $= \frac{1}{10} C 9$, & sera par conséquent un pouce (§. 9.) &c. Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque.

La mesure géométrique étant divisée en dix, on peut considérer ces parties comme des pieds. Mais dans ce cas, pour entendre la démonstration précédente, il faut aussi supposer que le pied n'est composé que de dix pouces ; ce dont il faut bien se souvenir, parceque M. Wolf se servant communément de cette manière de compter, la plupart de ses calculs, solutions, ou démonstrations seroient intelligibles sans cette attention. J'ai cependant réduit presque partout ses calculs à la manière de compter usitée en France.

Corollaire.

165. Si l'on met donc la jambe d'un compas sur la troisième ou septième ligne, & qu'on l'ouvre jusqu'à ce que l'autre jambe tombe sur la ligne droite menée au-dessous de la cinquième division, cette

O ij.

ouverture donnera 5 pieds 3 ou 7 pouces. Ou bien si je veux avoir $2^{\circ} 3''$ & $5'''$, je poserais une jambe du compas sur la cinquième parallèle à AE au point I, & j'ouvrirai le compas jusqu'à ce qu'il rencontre K sur la même parallèle, cette ouverture de compas me donnera ce que je demande.

Problème L I V.

Pl. V.
Fig. 22.

166. Mesurer la distance des deux lieux A & B accessibles par un troisième D.

Solution.

1°. Posez en C le Graphomètre out able géométrique, sur laquelle vous choisirez le point *c*.

2°. De ce point, par le moyen des pinnules visez au point A, & menez la droite *ca*.

3°. Bornoyez ensuite du point *c* vers B, & menez la droite *cb*.

4°. Mesurez les toises qui se trouvent depuis C jusques à A, & depuis C jusques à B, transportez ces mesures, au moyen de l'échelle géométrique, de *c* en *a* & de *c* en *b*.

5°. Mesurez enfin sur la même échelle la ligne *ab*, qui marquera la distance que vous cherchez.

Démonstration.

L'angle *c* étant commun aux deux triangles *acb* & *AcB*, & les cotés qui le forment étant aussi proportionnels, on doit conclure que *ab* est à AB comme *ca* est à *cA*. (§. 152.) Or *ca* contient autant de parties de l'échelle ou petite mesure, que *cA* en contient de la grande : *ab* contiendra donc autant de parties de la petite mesure, que AB en contiendra de la grande dont on s'est servi sur le terrain.

Autre Solution.

1°. Ayant posé le graphomètre en C, mesurez l'angle $A c B$. (§. 43.)

2°. Mesurez aussi les lignes cA & cB . (§. 44.)

3°. A l'aide du rapporteur & de l'échelle géométrique construisez l'angle acb . (§. 58.)

4°. Mesurez la ligne ab sur l'échelle géométrique, (§. 164.) vous connoîtrez par-là combien la ligne AB contient de toises, pieds & pouces &c.

Démonstration.

Elle revient au même que celle que j'ai donné à la première Solution.

Problème LV.

167. Trouver la distance de deux lieux A & B, Pl. V.
dont un seul A est accessible.

Fig. 100.

Solution.

1°. Ayant posé le graphomètre dans un lieu choisi à volonté C, dirigez votre vûe par les pinnules du point c vers les deux points A & B.

2°. Cherchez la distance de C au point accessible A.

3°. Transportez cette distance avec une échelle géométrique, de c en a . (§. 164.)

4°. Placez ensuite le graphomètre au point A, en sorte que a soit précisément sur A, & que vous puissiez voir un piquet planté au point C par les pinnules dirigées de a vers c .

5°. Bornoyez alors de a vers B & tirez la droite ab .

O iij

6°. Prenez enfin sur l'échelle géométrique (§. 164.) la distance de ab , qui vous fera connoître celle de $A B$.

Démonstration.

Puisque l'angle $c = C$ & l'angle $a = A$, ac sera à l'égard de AC comme ab est à AB . (§. 148.) Or la ligne ac contient autant de parties de l'échelle géométrique ou petite mesure, que la ligne AC en contient de la grande : ab doit donc contenir autant de parties de la petite mesure ou échelle géométrique, que AB en renferme de la grande. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

On entend par *grande mesure* une toise ou perche, qui seroit divisée en pieds, pouces &c. comme elles le sont communément. Il faut aussi remarquer que si l'échelle géométrique ou petite mesure dont on se sert est divisée par 10, il faudra, où que la perche qui sert à mesurer en grand les distances, soit aussi divisée par 10 pieds ou parties, ou faire la réduction en comparant la grande mesure avec la petite; par exemple, supposé qu'on se serve d'une toise ordinaire composée de 6 pieds, qui contiennent chacun douze pouces, pour mesurer la distance $c A$ de l'exemple ci-dessus, & que cette distance soit de six toises quatre pouces; si mon échelle géométrique, au lieu d'être divisée par toises de six pieds, est divisée par mesure géométrique de dix parties, qu'on peut considérer comme des pieds; pour réussir à comparer proportionnellement le nombre des toises qui se trouvent dans la distance $c A$, avec le nombre des parties qui sont

comprises dans l'échelle géométrique, dont les divisions sont de dix en dix; il faudra dans ce cas, réduire les toises en pieds, & en compter autant qu'il se trouvera de parties dans l'échelle géométrique, pour les rapporter de *c* en *a*. Ainsi pour plus grande commodité, il faudroit avoir une échelle géométrique divisée par six, quand on se servira d'une toise, parce qu'une toise est composée de six pieds; & qu'il sera pour lors facile de prendre sur l'échelle géométrique autant de divisions, qu'il se trouvera de toises dans la distance proposée.

Autre maniere de résoudre le problème ci-dessus.

1°. Mesurez avec le graphomètre les angles C Fig. 100. & A (§. 43.) & la longueur. AC. (§. 44.)

2°. De ces distances connues, construisez le triangle *acb*; (§. 60.) par le moyen du rapporteur & de l'échelle géométrique.

3°. Mesurez ensuite la ligne *ab* selon les divisions de l'échelle géométrique; & vous connaîtrez ainsi la distance AB.

Démonstration.

Elle est la même que celle que j'ai donnée en dernier lieu.

Problème LVI.

168. Mesurer la distance de deux lieux inaccessibles AB. Pl. V. Fig. 101.

Solution.

1°. Ayant choisi les deux stations C & D, placez le graphomètre à la première C, & plantez un piquet à l'autre. O jv

2°. Du point C bornoyez par les pinnules vers le piquet D, & puis du même point C ayant aussi bornoyé vers B & A, tirez les lignes droites sur le graphomètre.

3°. Prenez la distance des stations CD, (§. 44.) & portez-la sur le graphomètre de *c* en *d*, par le moyen de l'échelle géométrique.

4°. Visez de D vers A & B, & tirez sur le graphomètre les droites *da* & *db*.

6°. Prenez ensuite la distance *ab* sur l'échelle géométrique, (§. 164.) & vous connoîtrez ainsi la distance AB.

Demonstration.

Comme l'angle *d* est commun aux deux triangles *dcb* & DCB, & que l'angle *c* est égal à l'angle C, *cd* est à CD comme *bc* est à BC. (§. 148.) D'ailleurs comme par la même raison le triangle *acd* est semblable au triangle ACD; *cd* sera à CD comme *ac* est à AC; (§. 148.) & par conséquent *bc* est à BC, comme *ac* à AC. (§. 57. Arithm.)

Or l'angle *acb* étant égal à l'angle ACB, *ab* sera à AB comme *ac* est à AC, (§. 152.) ou *cd* à CD. (§. 57. Arithm.) Et comme dans l'échelle géométrique, autant de parties répondent à la droite *dc*, qu'il s'en trouve dans la grande mesure qui répondent à la droite DC: il en faut autant dans l'échelle géométrique qui répondent à la ligne *ab*, qu'il s'en trouvera qui répondent à AB dans la grande mesure dont on s'est servi sur le terrain.

Autre solution du même Problème.

Pl. VI. 1°. Mesurez les angles *x* & *y* de la première station C, & les angles *z* & *w* de la seconde D; (§. Fig. 102.

43.) leurs sommes donneront les angles ACD & BDC.

2°. Prenez ensuite la distance de CD, (§. 44.) que vous porterez sur le papier au moyen de l'échelle géométrique, & avec les angles x & $z + w$, formez le triangle BCD, & puis l'autre ACD avec les angles z & $x + y$. (§. 60.)

3°. Mesurez enfin la ligne AB sur l'échelle géométrique, & vous trouverez la distance que vous cherchez.

Démonstration.

On démontre cette seconde solution par le même raisonnement que l'on a apporté pour démontrer la première.

Remarque.

169. On mesurera diverses distances par la même méthode, si de deux stations marquées, on bornoye à chaque lieu en particulier.

Problème LVII.

170. Mesurer la hauteur accessible AB.

Pl. VI.

Fig. 103.

Solution.

1°. Prenez un point D dans la campagne sur lequel vous élevez verticalement votre graphomètre ou *planchette*, de façon que le côté inférieur soit parallèle à l'horizon : situation qu'on lui donnera avec un *niveau*.

2°. Ayant appliqué horizontalement une règle avec des pinnules sur le centre, vous bornoyerez à travers du côté de l'endroit dont vous cherchez

à connoître la hauteur, & vous menerez ensuite la droite cE .

3°. Tournez la règle autour du point c jusqu'à ce qu'en regardant par les pinnules, vous apperceviez le sommet de la hauteur A , & pour lors vous menerez sur le graphomètre la droite cb .

4°. Mesurez la distance qu'il y a depuis c jusqu'au bas de la hauteur C , (§. 44.) & portez-la sur le graphomètre de c en E , par le moyen de l'échelle géométrique.

5°. Elevez au point E la perpendiculaire Eb ; (§. 70.) qui marquera par son application sur l'échelle géométrique la hauteur AC . (§. 164.)

6°. Ajoutez à cette hauteur celle de CB , & la somme fera celle que vous demandez.

Démonstration.

L'angle c est commun aux deux triangles Ecb & CcA : les angles EC sont droits: ainsi cE est à cC comme bE est à AC . (§. 148.) Or Ec contient autant de parties de l'échelle géométrique, que cC en contient de la grande mesure; Eb contiendra donc nécessairement autant de parties de l'échelle géométrique, que AC en contient de la grande mesure dont on s'est servi pour mesurer le terrain.

Autre Solution du même problème.

Pl. VI.
Fig. 103.

1°. Mesurez l'angle c , (§. 43.) & la distance des stations cC ou DB . (§. 44.)

2°. De ces mesures trouvées, formez le triangle ebc . (§. 60.)

3°. Prenez la mesure de la hauteur be sur l'échelle géométrique, & vous aurez la hauteur AC .

4°. Ajoutez à AC , la hauteur de l'instrument, la somme vous donnera la même hauteur AB .

Démonstration.

Elle est la même que la précédente.

Remarque.

171. On suppose dans toutes ces solutions de problème, que la ligne DB est horizontale : Car si l'instrument étoit posé plus haut ou plus bas que la hauteur AB ; il faudroit aussi mesurer l'angle CcB, & construire le triangle CcB sur le papier par le moyen de l'échelle géométrique, & puis l'ajouter à la hauteur si l'instrument est plus haut, ou l'en retrancher s'il étoit placé plus bas que A.

Problème LVIII.

172. Mesurer une hauteur inaccessible AB.

Pl. VI.
Fig. 104.]

Solution.

1°. Après avoir choisi à volonté les deux stations D & E, comme dans le problème précédent, bornoyez vers la pointe A, & le bas C, étant placé à la première station D.

2°. Mesurez la distance des deux stations ED ; (§. 44.) & portez-la, par le moyen de l'échelle géométrique, du point *f*, qui doit répondre perpendiculairement sur D, au point *e*. (§. 164.)

3°. Transportez le graphomètre de D en E, & posez-le de façon que *e* soit précisément sur E, & visez ensuite au piquet que vous aurez planté en D, & au sommet A.

4°. Au point où la droite *ea* coupe la droite *fa*, abaissez une perpendiculaire *ac* sur *fe*, (§. 69.)

qui portée sur l'échelle géométrique donnera la hauteur AC.

5°. Ajoutez à AC la hauteur BC, la somme fera la hauteur AB que l'on demande.

Démonstration.

On démontre cette solution comme celle du problème précédent.

Autre méthode pour résoudre le même problème.

Pl. VI. 1°. Mesurez à la première station D l'angle f ,
Fig. 104. & à la seconde E l'angle e ; (§. 43.) & prenez aussi la distance des stations ED (§. 44.) que vous transporterez sur le papier selon l'échelle géométrique. (§. 164.)

Fig. 105. 2°. Construisez - y le triangle fed par le moyen des angles e & f . (§. 60.)

3°. Prolongez la base fe jusques en c , & abaissez de a la perpendiculaire ac . (§. 69.)

5°. Mesurez enfin ac sur l'échelle géométrique, (§. 164.) & ajoutez la hauteur de l'instrument, d'où vous avez pris la quantité des angles, ou faites attention à ce que nous avons dit, (§. 171.) & vous aurez ainsi la hauteur que vous souhaitiez.

La démonstration est la même que la précédente.

Problème LIX.

173. Lever le plan de quelque figure rectiligne que ce soit, accessible dans toutes ses parties, comme ABCDE.

Pl. VI.
Fig. 106.

Solution.

Mesurez la longueur de chaque côté AB, BC,

CD, DE, EA ; aussi-bien que les diagonales AC & AD ; portez ensuite ces longueurs sur le papier, par le moyen de l'échelle géométrique, & vous en formerez votre figure. (§. 164. & 111.)

Démonstration.

Lorsqu'on veut transporter le plan d'une figure sur le papier, on doit l'y dessiner de façon que chaque angle & chaque côté de la figure dessinée soient égaux en petit à chaque angle & chaque côté de la grande figure auxquels ils répondent. Si donc pour faire chaque côté des triangles ABC, ACD, ADE, on prend sur l'échelle géométrique autant de parties qu'il s'en trouve sur le terrain, & forme ainsi chaque côté de la grande figure, les côtés de la petite seront entr'eux comme les côtés de la grande. Car si, par exemple, le côté AB en a 6 ; & BC 7 sur le terrain, le côté AB sur le papier en aura aussi 6, & BC 7 : & par conséquent tant dans l'une que dans l'autre figure, AB sera à BC comme 6 est à 7 : les angles & les côtés de la petite figure seront donc égaux proportionnellement à ceux de la grande ; (§. 148.) & puisque les angles de la figure conviennent avec ceux des triangles, il faut nécessairement que les angles de la petite figure, soient égaux à ceux de la grande qui est sur le terrain. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autre méthode pour résoudre le problème

- 1°. Placez le graphomètre à un point F choisi dans la figure. Pl. VI.
Fig. 107.
- 2°. Bornoyez du point F vers chaque piquet, que vous aurez eû soin de planter auparavant à cha-

que angle de la figure A, B, C, D, E; menez ensuite les droites Fa , Fb , Fc , Fd , Fe .

3°. Prenez la mesure des lignes FA , FB , FC , FD , FE . (§. 144.)

4°. Déterminez par le moyen de l'échelle géométrique, les lignes Fa , Fb , Fc , &c. (§. 164.)

5°. Menez enfin les lignes droites ab , bc , cd , de & ea ; & vous aurez sur le papier le plan de la figure ABC, &c.

Démonstration.

Dans le triangle aFb on voit que Fa est à Fb comme FA est à FB dans le triangle AFB , & que l'angle F est commun aux deux triangles: Fb est donc à FB comme ba est à BA . (§. 152.) On démontre par la même raison que Fb est à FB comme bc à BC . (§. 57. Arithm.) D'ailleurs l'angle ABC est égal à l'angle abc . (§. 152.) Et comme on démontre par la même raison que les autres angles c , d , e , a sont égaux aux angles C , D , E , A , & que les autres côtés sont entre eux comme les côtés CD , DE , EA ; il est évident que le plan est juste. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Troisième méthode.

Fig. 107. 1°. Du point F mesurez les angles AFB , BFC , CFD , DFE , EFA . (§. 43.) Mesurez aussi les lignes FA , FB , FC , FD & FE . (§. 44.)

2°. Portez les angles (§. 48.) & les lignes sur le papier, par le moyen de l'échelle géométrique. (§. 164.)

3°. Mesurez les droites ab , bc , cd , de & ea ; & vous aurez la figure telle que vous la demandez.

Démonstration.

Voyez la précédente.

Problème LX.

174. Lever le plan de la figure ABCDE que l'on peut voir toute entière des deux stations A & B. Pl. VI.
Fig. 108.

Solution.

1°. Ayant posé votre graphomètre en A, bornoyez vers tous les angles de la figure B, C, D & E, & menez des lignes du point A vers tous ces angles.

2°. Mesurez la distance des stations AB, (§. 44.) & portez - les sur le graphomètre par le moyen de l'échelle géométrique (§. 164.) de A en b.

3°. Transportez l'instrument de A en B & placez - le de façon que le point b réponde perpendiculairement à B, & qu'en visant par les pinnules de la règle appliquée sur la ligne bA, vous puissiez voir le piquet que vous aurez eu soin de planter en A après en avoir ôté le graphomètre.

4°. Visez ensuite de B vers tous les autres angles de la figure en particulier, & menez des droites qui couperont les premières en e, d, c.

5°. Tirez enfin les droites ed, dc, après quoi le plan sera levé.

Démonstration.

Elle est presque la même que celle du problème 56. (§. 168.)

Seconde méthode.

Fig. 108.

De A mesurez aussi les angles CAB, DAC, EAD, & de B mesurez aussi les angles EBA, DBE, CBD, (§. 43.) & puis encore la distance AB. (§. 44.)

2°. Marquez sur le papier la ligne *ab*, & par le moyen de l'échelle géométrique, (§. 164.) portez-y la longueur de la ligne AB.

3°. Transportez en *bac*, *cad*, *dae*, les angles CAB, DAC & EAD: & en *abe*, *ebd*, *dbc* les angles ABE, EBD, DBC. (§. 48.)

4°. Joignez enfin par des droites les points *a*, *e*, *d*, *c*, *b*, & pour lors vous aurez tout le plan de la figure.

Démonstration.

Voyez celle du problème 56. (§. 168.)

Problème LXI.

175. Lever le plan d'une figure dont on peut faire le tour, comme ABCDE.

Pl. VI.
Fig. 108.

Solution.

1°. Après avoir placé le graphomètre au point A, bornoyez vers les piquets plantés en B & E, afin de pouvoir marquer sur ce point l'angle BAE ou *bæe*.

2°. Prenez la mesure des droites AB & AE, (§. 44.) & transportez-les sur le graphomètre de *a* en *b* & *e*, à l'aide de l'échelle. (§. 164.)

3°. Transportez l'instrument en B de manière que *b* soit perpendiculaire à B, bornoyez ensuite vers A & vers C, afin de pouvoir marquer sur le graphomètre l'angle BCA. 4°.

4°. Prenez la mesure de la ligne BC , (§. 44.)
 & portez-la sur l'instrument de b en c , (§. 164.)
 & en faisant ainsi le tour de la figure vous en aurez
 levé tout le plan.

Démonstration.

Tous les angles de la figure marquée sur le graphomètre sont égaux à ceux de la figure représentée sur le terrain, & les côtés de la petite sont entre eux comme les côtés de la grande : la petite est donc semblable à la grande. (§. 147.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autrement.

Mesurez tous les côtés (§. 44.) & autant d'angles qu'il y a de côtés, exceptez trois. (§. 43.) Car il est aisé de lever un plan dont on connoît les côtés & les angles. (§. 112.)

Problème LXII.

176. Trouver l'aire de quelque terrain ou champ que ce puisse être.

Solution.

1°. Levez d'abord le plan du terrain selon la méthode marquée dans les problèmes précédents.

2°. Cherchez l'aire de la figure selon la solution du problème 35. (§. 123.)

DEFINITION XVI.

Pl. VII.
Fig. 113.

177. La sphère se forme en faisant tourner le demi-cercle ACB autour du diamètre AB .

Corollaire.

178. Tous les points de la superficie d'une sphère sont donc dans une égale distance du centre (§. 13.)

DEFINITION XVII.

Pl. VII.
Fig. 114.

179. Une figure rectiligne ABC, dont les lignes droites AD sont portées de haut en bas, ou de bas en haut par un mouvement toujours parallèle à lui même, représente un *prisme*, qui est un corps solide terminé aux deux bouts par des plans polygones, égaux, semblables & parallèles, & dans sa longueur, par autant de parallélogrammes qu'il y a de côtés aux deux polygones qu'on nomme les *bases*. Quand ces deux bases sont des triangles, le *prisme* se nomme *triangulaire*; tel est celui qui est représenté dans la figure citée à la marge.

Remarque.

On nomme *prismatique*, ce qui a la figure d'un *prisme*, ou qui a quelque rapport au *prisme*; & *verres prismatiques* ceux dont on se sert pour séparer les rayons de la lumière. On appelle aussi *couleurs prismatiques* les rayons colorés de lumière qu'un *prisme* de verre fait appercevoir.

Fig. 115.

Si le cercle X est porté de bas en haut, ou de haut en bas en suivant la droite FG, il forme la figure d'un *cylindre*; la même chose arrive quand un rectangle ABCD, ou un quarré tourne autour de sa hauteur EC.

Fig. 116.

Corollaire I.

180. Tout cylindre est donc un solide composé

de plusieurs plans circulaires, égaux & concentriques : le premier & le dernier de ces cercles prennent le nom de *bases*, & la ligne BC qui passe par tous les centres, se nomme *l'axe* du cylindre. Pl. VII.
Fig. 115.

Cylindrique se dit d'une figure ou corps solide qui a la forme d'un cylindre ; ce qui doit s'entendre d'une cavité, comme d'un corps solide.

Un corps de pompe doit être intérieurement bien cylindrique. Tout prisme a deux bases & est terminé tout à l'entour par autant de parallélogrammes que sa base a de côtés.

Corollaire I II.

181. Toutes les sections d'un prisme ou d'un cylindre, parallèles à la base, sont égales entr'elles.

DEFINITION XVIII.

182. Si le rectangle ABCD est porté en droite ligne de A en E il décrit un *parallelepipede* : & si le quarré O est pareillement porté de J en I, il forme le *cube*. Fig 117.
Fig. 118.

Corollaire I.

183. Le Parallelepipède est donc terminé par six rectangles, dont les deux côtés opposés sont égaux entre eux, & les sections de la base sont parallèles entr'elles.

Corollaire II.

184. Le cube ou *exaëdre* est donc terminé par six faces ou quarrés égaux entre eux ; tel est un dez à jouer.

D E F I N I T I O N X I X.

Pl. VII. 185. Si le triangle rectangle ABC fait une révolution sur un de ses côtés immobile AB, il décrit le cône.

Corollaire.

186. Toutes les sections parallèles à la base d'un cône, sont des cercles, d'autant plus petits qu'ils approchent plus du *sommet* ou *pointe* A; la ligne AB se nomme *axe* du cône, & le cercle DBC sa *base*.

On appelle aussi *cône* un solide qui est produit par le mouvement d'un triangle obliqu'angle, c'est-à-dire, qui n'a point d'angle droit: & alors pour le distinguer d'avec le précédent, que l'on peut appeller *cône droit*, on le nomme *cône incliné* comme GHI, qui est produit par le mouvement du triangle obliqu'angle GOH, au-tour du côté immobile GO.

D E F I N I T I O N X X.

Fig. 121. 187. Si l'on mène la droite AD, fixée par une de ses extrémités au point D, tout autour de la circonférence d'une figure rectiligne ABC, elle décrit la figure d'une *Pyramide*.

Corollaire.

188. La *Pyramide* est un solide à plusieurs faces, qui a pour *base* une figure rectiligne, & est terminée par autant de triangles, que la base a de côtés, mais qui vont toujours en diminuant aboutir au point D; si la figure ABC est circulaire, le mouvement de la droite AB formera un cône.

DEFINITION XXI.

189. Un *corps régulier* est un solide terminé par des plans égaux, réguliers, de même espèce, dont les angles solides sont égaux entre eux : les autres corps se nomment *irréguliers*.

DEFINITION XXII.

190. Outre le cube (§. 182.) il y a encore quatre autres sortes de corps réguliers, à sçavoir le *Tetraèdre* composé de quatre triangles équilatéraux ; l'*Octaèdre*, de huit ; l'*Icosaèdre* de vingt : & le *Dodécaèdre* formé par douze pentag.

Pl. VII.
Fig. 123.
124.
125. &
126.

Problème LXIII.

191. Déterminer la solidité d'un cube.

Solution.

On mesure les solides avec une *perche cubique*, c'est-à-dire, un cube dont chaque côté est une perche de long & de large, qu'on nomme encore *perche courante*. Elle se divise en pied, en pouces &c. cubiques. Les premiers sont cubes, dont un côté est égal à un pied, & les seconds sont aussi cubes, quand leur côté est égal à un pouce.

Quand vous voudrez donc déterminer la solidité d'un cube.

1°. Mesurez un côté du cube, & le multipliez par lui-même ; le produit donne la base. (§. 114. 184.)

2°. Multipliez ce produit par les côtés, & le second produit donnera la solidité du cube.

3°. Si vous multipliez la base par six, vous au-

rez la surface de tout le cube. (§. 184.)

EXEMPLE.

Côté	$\begin{array}{r} 34^1 \\ 34 \\ \hline 136 \\ 102 \\ \hline \end{array}$	Baſe	$\begin{array}{r} 1156^1 \\ 34 \\ \hline 4624 \\ 3468 \\ \hline \end{array}$
	6	Solidité du cube	39304^1
Superficie du cube			6936^1

Démonſtration.

Pl. VII.
Fig. 127.

Si l'on forme, par imagination, un cube dont un côté eſt diviſé en parties égales, il eſt évident qu'il en naîtra autant de lits de moindres cubes, poſés les uns ſur les autres, que la hauteur aura de parties. Il n'eſt pas moins conſtant que chaque lit contiendra autant de petit cubes, que la baſe contiendra de quarrés. D'où l'on doit conclure, qu'en multipliant la baſe par la hauteur, le produit donnera le nombre des moindres cubes contenus dans le plus grand. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

192. Si donc le côté d'un cube eſt de 10, ſa ſolidité fera de mille. Si un côté contient dix pieds cubes, il ſ'en trouvera par conſéquent mille dans le grand cube. Ainſi la perche cubique contient donc 1000 pieds cubiques, le pied cubique 1000 pouces cubiques, le pouce cubique 1000 lignes cubiques.

Remarque.

Ne perdez pas de vûe ce que nous avons dit dans la remarque qui suit immédiatement la démonstration de la solution du problème ; (§. 167.)

Théorème XXVII.

193. Les parallépipèdes, les prismes, les cylindres, dont les bases & les hauteurs sont égales, sont aussi égaux.

Démonstration.

Si l'on coupe par imagination un parallépipède, un prisme, un cylindre, en forme de *disques* de si petite épaisseur qu'on puisse les imaginer : ces disques seront non seulement égaux entre eux ; (§. 181. 183.) mais il arrivera même que si deux corps ont la même hauteur, on pourra tirer autant de disques de l'un que de l'autre : ces corps occuperont donc un espace égal ; ce qui est évident par la seule supposition de l'égalité de leur hauteur & de leur base. *Ce qu'il falloir démontrer.*

Problème LXIV.

194. Mesurer la solidité & la superficie d'un parallépipède.

Solution.

- 1°. Multipliez la longueur AB par la largeur BC, pour trouver la base ABCD. (§. 117. 183.)
- 2°. Si vous multipliez cette base par la hauteur BF, vous aurez la solidité.

Pl. VII.
Fig. 118.

Soit par exemple	AB 36'	BC 15'	BF 12'
longueur	AB 36		base 540
largeur	BC 15		hauteur 12
	180		1080
	36		54
Base ABCD	540		solidité 6480

Pour la superficie.

1°. Multipliez AB par BC, & AB par BF & BF par BC pour avoir les quadrilatères BD, EB BG (§. 117. 183.)

2°. Ajoutez ces trois quadrilatères, & multipliez la somme par 2 ; le produit sera la superficie du parallépipède (§. 117. 183.)

EXEMPLE.

AB 36'	AB 36'	BC 15'
BC 15	BF 12	BF 12
180	72	30
36	36	15
□ DB 540	□ BG 432	□ BE 180
□ BG 432		
□ BE 180		
1152'		
2		

2304' Superficie du Parallépipède.

Démonstration.

Elle est la même que la précédente. (§. 191.)

Théorème XXVIII.

195. Le plan diagonal DBFH, divisera le parallépipède en deux prismes égaux. Pl. VII.
Fig.^e 128.

Démonstration.

La diagonale DB divise le parallélogramme ABCD en deux triangles égaux (§. 102.) Or comme les prismes ADBFGH & DBCEFH ont les bases égales, & la même hauteur DH; ils seront donc aussi égaux (§. 193.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème LXV.

196. Mesurer la solidité & la superficie d'un prisme. Fig. 129,

Solution.

1°. Cherchez la base du prisme (§. 117. 121. 122. 123. 124.)

2°. Multipliez cette base par la hauteur, le produit fera la solidité que vous cherchez.

3°. Multipliez la circonférence entière de la base par la même hauteur, le produit exprimera la superficie, après qu'on en aura rétranché les bases.

4°. Si on les y ajoute on aura la superficie entière (§. 180.)

E X E M P L E.

Soit AB 8'	AE 15'
AB 8'	ABC 24'
$\frac{1}{2}$ CD 3	AE 15'
ABC 24'	120
	24

Solidité du Prisme 360'

BC 9 1"

AB 80

AC 62

Circonférence	233"
	AE 15.0

11650

233

Superficie sans bases	34950"
ABC —	2400
HEI	2400

Superficie entière 39750".

Démonstration.

Le prisme triangulaire est la moitié du Parallélipède, qui a la même hauteur avec une double base (§. 195.) Si on multiplie donc la base du parallélipède par sa hauteur, le produit sera sa solidité (§. 194.) Si l'on multiplie aussi la base du prisme, qui est la moitié du parallélipède par la hauteur, on aura la moitié du parallélipède, c'est-à-dire la solidité du prisme. Comme tous les autres prismes peuvent se réduire en triangles, il faut leur

appliquer les démonstrations que nous avons données en parlant des triangles.

Problème LXVI.

197. Trouver la solidité & la superficie d'un Cylindre par son diamètre & sa hauteur donnés.

Solution

1°. Cherchez la base du Cylindre (§. 134.)

2°. Multipliez-la par sa hauteur, le produit sera la solidité demandée.

3°. Si vous multipliez sa circonférence par la hauteur, vous aurez la superficie en rétranchant les bases, & si vous les y ajoutez, vous aurez la superficie entière.

E X E M P L E.

Soit le diamètre 2AB 560", hauteur BC 892."

Bafe	246176"	Circonf.	17584
Hauteur BC	892	BC	892
	492352		351680
	2215584		158256
	1969408		140672
Solid. du cylindre.	219588992"	Superf.	156849280
		Bases ôtées	5 24617600
		Bases	24617600
		Superficie' entiere	206084480

Pl. VII. •
Fig. 116.

Démonstration.

Le cercle étant un poligone régulier composé d'une infinité des côtés, on peut considérer le cylindre comme un prisme qui auroit aussi une infinité

de côtés. On trouve donc sa solidité en multipliant sa base par sa hauteur, & la circonférence de la base multipliée par la même hauteur donnera la superficie (§. 196.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème XXIX.

198. Les Pyramides & les cônes qui ont même base & même hauteur, sont égaux.

Démonstration.

Si l'on conçoit deux pyramides ou cônes coupés par une infinité de plans parallèles aux bases, & également éloignés du sommet, il n'y aura pas plus de plans dans une pyramide que dans l'autre, à cause des hauteurs égales; donc la somme des plans de l'une sera égale à la somme des plans de l'autre, & par conséquent les pyramides seront égales. On doit faire le même raisonnement pour les cônes, puisque les cônes droits ou inclinés sont des pyramides dont les bases ont une infinité de côtés.

Théorème XXX.

199. Toute Pyramide est la troisième partie d'un prisme qui auroit même base & même hauteur.

Démonstration.

Pl. VII.
Fig. 12.

Je coupe les trois parallélogrammes montans par les diagonales AF, FC, EC, & je fais passer un plan par les deux AF, FC, & un autre par les deux FC, EC, ce qui me donne trois pyramides ABCF, EFDC, ECAF; or, les deux premières ont les bases ABC, DEF égales, de même que leurs hauteurs BF, DC; & si l'on conçoit

que la seconde EFDC ait pour base le triangle ECD, & que la base de la troisième EACF soit le triangle ACE, on trouvera que ces deux pyramides sont aussi égales; à cause que leurs bases AEC, ECD sont égales, & qu'elles ont leurs sommets au même point F, ce qui leur donne une même hauteur; donc les trois pyramides sont égales, & par conséquent une pyramide est la troisième partie d'un prisme triangulaire.

Corollaire.

200. Puisqu'on peut donc considérer un cône comme une pyramide ayant une infinité d'angles: le cône fera la troisième partie d'un cylindre qui auroit la même base & la même hauteur.

Problème LXVII.

201. Mesurer la solidité d'une pyramide & d'un cône.

Solution.

1°. Cherchez la solidité d'un prisme ou d'un cylindre, qui auroit même base & même hauteur que la pyramide, & le cône. (§. 196 & 197.)

2°. Divisez-là par 3: le quotient fera la solidité de la pyramide ou du cône.

Ou

Multipliez la base de part & d'autre par la troisième partie de la hauteur.

E X E M P L E.

Soit la solidité du prisme (§. 196.) 360'. la solidité de la pyramide fera 120'.

Soit la solidité du cylindre (§. 197) 2190'. 588', 992". la solidité du cône fera 731, 963 30 $\frac{2}{3}$ ".

Problème LXVIII.

202. Trouver la solidité d'un cône tronqué ABCD.

Solution.

1°. Dites d'abord : le grand demi-diamètre AG est à la hauteur du cône entier comme la différence des demi-diamètres AG & CF est à la hauteur du cône tronqué CH ; (§. 149) vous trouverez la hauteur du cône entier EG, par la Règle de Trois. (§. 85. Arithm.)

2°. Cherchez ensuite la solidité du cône entier AEB par la connoissance de sa hauteur & de son diamètre AB. (§. 201.)

3°. Soustrayez la hauteur du cône tronqué FG de la hauteur du cône entier EG, pour laisser la hauteur de celui qu'on a ôté EF.

Pl. VII
Fig. 130.

4°. A l'aide de cette dernière hauteur & du diamètre CD, cherchez la solidité du cône ECD (§. 201.)

5°. Retranchez enfin le petit cône ECD du grand AEB, ce qui restera sera la solidité du cône tronqué ACDB.

E X E M P L E.

Soit AB 36', CD 20', FG = CH 12' ;
AG 18', CF 10' & AH 8' ; donc
AH : CH = AG : GE

$$8 : 12 = 18 :$$

$$4) 2 : 3 = 18 \text{ (§. 96 Arithm.)}$$

$$2) 1 : 3 = 9$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 27 = GE \\ 12 = GF \\ \hline 15 = FE \end{array}$$

$$100 : 314 = 18 :$$

18

2512

314

56'5"2''' moitié de la grande circonférence
1800 AG

4521 600

5652

101736" grande base
90 $\frac{1}{3}$ GE

9° 15' 6" 240" Cône AEB

$$100 : 314 = 10 :$$

10

314" moitié de la petite circonférence
100 CF

31400" petite base
50 $\frac{1}{3}$ EF

1570000" Solidité du Cone CED

9156240 Solidité du Cone AEB

7586240 Solidité du Cone tronqué ACDB.

Théorème XXXI.

203. Une sphère est égale aux deux tiers d'un cylindre de même hauteur, & qui auroit même base, c'est-à-dire, dont la base seroit le plus grand cercle de la sphère.

Démonstration.

Soit le quart du cercle ABC, qui en tournant pl. VII. autour de son rayon fixe BC décrit une demi-sphère Fig. 131.

ABL ; je décris le quarré ACBM du rayon BM ; & je coupe ce quarré par la diagonale MC qui forme le triangle rectangle ifocèle MBC ; je conçois que le rayon BC soit coupé en une infinité de parties égales ent'elles , & que des points de division O , T , &c. soient menées des perpendiculaires OQ , TX sur ce rayon , & qui se terminent sur AM , ces droites seront les élémens du quarré AMBC , leurs parties OR , TZ , &c. qui se terminent sur la circonférence du quart de cercle , seront les élémens de ce quart de cercle , & les parties OS , TV , &c. qui se terminent sur la diagonale MC , seront les élémens du triangle rectangle ifocèle MBC ; de façon que chaque élément OS , &c. de ce triangle sera égal à sa distance OC , &c. du centre C ; car les triangles semblables MBC , SOC , donnent MB. BC :: SO. OC ; Or MB = BC ; donc SO = OC. & il est aisé de voir que chaque élément OQ , TX , &c. du quarré ACMB , sera égal au rayon BC ; si l'on conçoit que le quarré ACBM , le quart de cercle ABC , & le triangle MBC tournent autour du rayon immobile BC ; les élémens du quarré ACBM décriront des cercles tous égaux qui formeront un cylindre AMHL ; les élémens du quart de cercle décriront des cercles qui formeront une demi-sphère ABL , & dont le plus grand sera celui que décrira le rayon AC , lequel pour cette raison se nomme le grand cercle de la sphère, & les élémens du triangle MBC décriront des cercles qui formeront un cône MCH. Or , ces cercles étant entr'eux comme les quarrés, au lieu des cercles, & à cause de la propriété du cercle, nous aurons $\overline{OR}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{OC}^2$; mais $BC = OQ$ & $OC = OS$; donc $\overline{OR}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OS}^2$; par la même raison

nous

nous aurons $\overline{TZ}^2 = \overline{TX}^2 - \overline{TV}^2$, & ainsi des autres, c'est-à-dire, que les quarrés des élémens du quart de cercle sont égaux aux quarrés des élémens du quarré ACBM, moins les quarrés des élémens du triangle MBC ; donc en remettant les cercles au lieu des quarrés, nous aurons les cercles décrits par les élémens du quart de cercle, ou la demi-sphère ABL, est égale aux cercles décrits par les élémens du quarré ACBM, ou au cylindre AMHL moins les cercles décrits par les élémens du triangle MBC, ou moins le cône MCH ; mais le cône MCH étant une pyramide d'une infinité de côtés, est le tiers du cylindre AMHL qui est un prisme d'une infinité de côtés de même hauteur & de même base que le cône, donc la demi-sphère ABC est égale aux deux tiers du cylindre AMHL.

On prouve de la même façon que la demi-sphère AKL est égale aux deux tiers du cylindre APEL, & que par conséquent la sphère entière est égale aux deux tiers du cylindre MPEH. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème XXXII.

204 Le cube du diamètre est à la sphère à peu près comme 300 à 157.

Démonstration.

Si le diamètre de la sphère est 100, son cube sera 1000 000 (§. 191.) & un cylindre ayant même base & même hauteur que la sphère, 785 000. (§. 197.) Par conséquent la solidité de la sphère $523333\frac{1}{3}$ (§. 203.) le cube du diamètre est donc à la sphère comme 1000 000

à 523333 $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire en multipliant l'un & l'autre par 3, comme 3000 000 à 1570000 (§. 58. Arithm.) ou en divisant par 10000, comme 300 à 157. (§. 59. Arithm.)

Remarque.

205. Je dis que le cube du diamètre est à la sphère à peu-près comme 300 à 157. Car dans la démonstration, on prend un rapport par approximation du diamètre à la circonférence 100 : 314. (§. 129.)

Théorème XXXIII.

206. La superficie d'une sphère est le quadruple du grand cercle de la même sphère.

Démonstration.

La sphère est égale à une pyramide qui a pour base la superficie, & pour hauteur le rayon d'une sphère. On trouvera la superficie en divisant sa solidité par la sixième partie du diamètre. Le produit des $\frac{2}{3}$ du grand cercle multipliés par le diamètre donne la solidité de la sphère ; si l'on divise donc ce produit par la sixième partie du diamètre, ou, ce qui est la même chose, qu'on le divise d'abord par le diamètre, pour avoir le quotient $\frac{2}{3}$ du plus grand cercle, & ensuite par $\frac{1}{6}$, on aura le quotient $\frac{12}{3}$ du plus grand cercle, c'est-à-dire, le quadruple du plus grand cercle. Or, la superficie de la sphère est la même chose ; donc la superficie d'une sphère est le quadruple du grand cercle de la sphère.

Corollaire.

207. On aura donc la superficie d'une sphère, si

on multiplie sa circonférence par le diamètre. (§. 134.)

Problème LXIX.

208. Trouver la superficie & la solidité d'une sphère par le diamètre connu.

Solution.

1°. Cherchez la circonférence du plus grand cercle. (§. 132)

2°. Multipliez-la par le diamètre donné ; le produit est la superficie de la sphère. (§. 207.)

3°. Si vous multipliez cette superficie par la sixième partie du diamètre, ou par le diamètre entier, & que vous divisiez le produit par 6, vous aurez la solidité de la sphère.

E X E M P L E.

Soit le diamètre 5600^m & la circonférence du grand cercle 17584^m

$$\begin{array}{r} 17584^m \\ \text{diamètre } 5600 \\ \hline 10550400 \\ 87920 \end{array}$$

Superficie de la sphère 984704^m
Diamètre 560

$$\begin{array}{r} 984704^m \\ \text{Diamètre } 560 \\ \hline 55082240 \\ 4923520 \\ \hline 551434240^m \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 29 \quad * \\ 551434240 \\ 66666666 \end{array} \right\} 91905706 \frac{2}{3} \text{ Solidité de la sphère.}$$

Q ij

Problème LXX.

209. Le diamètre d'une sphère étant donné, trouver sa solidité, par une méthode différente de celle qui est ci-dessus.

Solution.

1°. Cherchez le cube du diamètre, (§. 191.) ou tirez-le de la table des cubes.

2°. Trouvez un nombre proportionnel à 300, 157 & au cube trouvé : (§. 85. Arithm.) ce nombre donnera la solidité de la sphère. (§. 204.)

E X E M P L E.

Soit le diamètre de la sphère 64", & le cube 262144", conséquemment

$$300 - 157 - 262144''$$

$$\begin{array}{r} 157 \\ \hline 1835008 \\ 1310720 \\ 262144 \\ \hline 41156608 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 12 \ 222 \\ 41156608 \\ 33333333 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 137188'' \\ 208 \\ 300 \end{array} \right. \text{Solid. de la sphère.}$$

Théorème. XXXIV.

210. Tous prismes, parallélipèdes, cylindres, pyramides & cônes qui ont mêmes hauteurs, sont entre eux comme leurs bases; & si leurs bases sont égales, ils sont entr'eux comme leurs hauteurs.

Démonstration.

Les prismes parallépipèdes, & cylindres sont comme les produits des bases par leurs hauteurs ; (§. 194. 196. 197.) les pyramides & les cônes sont comme les produits de la troisième partie de leurs hauteurs multipliées par les bases : (§. 201.) si leurs hauteurs sont égales, ils seront donc entre-eux comme les bases sont entre-elles ; & si leurs bases sont égales, ils seront comme leurs hauteurs. (§. 58. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

211. Les bases des cylindres sont des cercles, (§. 179.) les cercles sont comme les carrés de leurs diamètres ; (§. 131.) les cylindres qui ont même hauteur sont donc comme les carrés de leurs diamètres, ou des circonférences des bases.

Théorème XXXV.

212. Les sphères sont comme les cubes de leurs diamètres.

Démonstration.

Une sphère étant au cube de son diamètre comme une autre sphère est au cube de son propre diamètre ; (§. 204.) une sphère sera donc à l'égard de l'autre, comme le cube du diamètre de l'une, est au cube du diamètre de l'autre. (§. 83. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

DE LA JAUGE.

Problème LXXI.

213. Construire la verge de fer, qu'on nomme
Q iij

communément *jauge*, par le moyen de laquelle on puisse trouver le nombre des mesures d'un fluide contenues dans un vaisseau cylindrique.

Solution.

Pl. VIII.
Fig. 132.

1°. Joignez à l'angle droit une ligne indéfinie au diamètre AB d'un vaisseau cylindrique.

2°. Portez de A à 1 la droite égale à AB; B 1 fera le diamètre d'un vase qui contient deux mesures, mais qui a la même hauteur que le premier vase.

3°. Faites $A 2 = B 1$, B 2 fera le diamètre d'un vase qui contiendra trois mesures, mais qui aura encore la même hauteur que le vase qui n'en contient qu'une. On trouve de cette manière les diamètres de plusieurs autres vases plus grands A 3, A 4, A 5, A 6, &c.

4°. Portez sur un côté de la jauge les divisions trouvées, A 1, A 2, A 3, &c. & sur l'autre côté, autant de fois que vous le pourrez, la hauteur d'un cylindre qui ne contient qu'une mesure; & vous aurez une jauge parfaite.

Démonstration.

Deux cylindres de même hauteur &c dont cette hauteur est celle d'une mesure, sont entre eux comme les quarrés de leurs diamètres; (§. 211.) d'où il est évident que le quarré du diamètre d'un vase qui contient deux, trois, quatre, &c. mesures, est le double, triple, quadruple &c. du quarré du diamètre d'un vase qui n'en contient qu'une. Or, le quarré de B 1 ou A 2 est le double, le quarré de B 2 ou A 3 est le triple, le quarré de B 3 ou A 4 est quadruple, &c. du quarré de AB ou A 1, (§. 144.)

& comme AB ou A 1 est le diamètre d'un vase qui tient une mesure, A 2 , fera le diamètre d'un vase qui en contient deux, A 3 , celui d'un vase qui en contient trois, A 4 , celui &c. Si vous appliquez donc au diamètre d'un vase cylindrique le côté de la jauge, où sont marquées ces divisions, vous verrez tout d'un coup combien ce fond peut tenir de mesures. C'est pourquoi si on multiplie le diamètre par la hauteur, le produit sera le nombre des mesures que tout le vase peut contenir. Ainsi par le moyen de la jauge on trouve la capacité d'un vase cylindrique, relativement aux mesures dont nous nous servons pour mesurer les fluides, comme le vin, la biere, l'eau-de-vie, &c. *Ce qu'il faut démontrer.*

Remarque.

214. Que le diamètre soit, par exemple, 8 & sa hauteur 12; le nombre de mesures que le vaisseau pourra contenir sera 96.

Problème LXXII.

215. Trouver la capacité d'un tonneau, c'est-à-dire, le nombre des mesures d'un fluide qu'il contient.

Solution.

10. Mesurez, avec le côté convenable de la jauge, la longueur du tonneau FE, & avec l'autre côté de la jauge, mesurez le diamètre du fond AB, & le diamètre du ventre du tonneau par son orifice C. Pl. VIII. Fig. 133.

20. Comme un tonneau forme un ventre vers le milieu, & que de son orifice C il va toujours en di-

Q jv

minuant vers ses deux extrémités , l'expérience qu'on a acquis par l'usage , (quoi qu'on ne puisse le démontrer géométriquement) le fait considérer comme un cylindre dont la base est un cercle moyen , arithmétiquement proportionel entre le cercle qui forme le fond , & celui qui forme le ventre : il faut donc ajouter le grand diamètre CD au petit AB.

3°. Multipliez la moitié de la somme par la longueur du tonneau ; le produit , (comme on le voit par la démonstration du problème précédent , (§. 213.) fera le nombre des mesures que peut contenir le tonneau.

E X E M P L E.

$$\text{Soit } AB = 8$$

$$CD = 12$$

$$\text{La somme fera} = 20$$

$$\text{Demi-somme} = 10$$

$$FE = 15$$

$$\text{Capacité du tonneau} = 150 \text{ mesures.}$$

Remarque

216. Il faut remarquer , qu'on est encore à trouver une méthode juste , infaillible & facile , pour mesurer les fluides dans un tonneau qui n'est pas plein. Mais si on le lève sur un de ses fonds , & qu'on prenne la hauteur du vin pour la longueur du tonneau , on pourra , à l'aide du problème précédent , trouver le nombre des mesures qu'il pourra contenir.

Problème LXXIII.

217. Trouver la solidité de quelque corps irrégulier que ce puisse être.

Solution.

1°. Mettez le corps irrégulier dans un parallélipède creux, remplissez ensuite d'eau ou de sable ce parallélipède & après avoir rendu la surface du sable exactement plane, marquez la hauteur AB de cette surface si vous n'avez pas rempli le vaisseau entièrement.

Pl. VIII.
Fig. 134.

2°. Ayant retiré le corps irrégulier du vaisseau, applanissez de nouveau la surface du sable qui doit rester dans le parallélipède, & marquez encore la hauteur de cette surface AC : de cette manière vous aurez la hauteur BC.

3°. Comme le corps irrégulier est égal au parallélipède DFCGE, il faut mesurer sa longueur FC, sa largeur CG, & chercher sa solidité. (§. 194.)

E X E M P L E.

Soit AB 8', AC 5'; on aura BC 3'. soit donc encore FC 12', CG 4', la solidité du corps sera 144'.

Remarque.

218. Si on ne pouvoit commodément mettre dans ce vase le corps irrégulier qu'on veut mesurer, comme seroit une statue immobile; on pourra l'entourer d'un parallélipède ou d'un prisme quadrangulaire, & remplir le vuide avec du sable; puis la base étant connue, on opérera comme ci-dessus.

Problème LXXIV.

219. Dessiner les développemens, rets ou chassés, qui pliés comme ils doivent être, représenteront les figures des différens corps géométriques.

Solution.

Pl. VIII.
Fig. 135. 1°. Faites le triangle équilatéral ABC: (§. 53.) divisez chaque côté en deux également, aux points E, D, F, & menez les droites DE, EF, FD; & vous aurez la figure ou développement d'un tétraèdre.

Pl. VIII.
Fig. 136. 2°. Si vous prolongez les côtés AC en G, BC, en H, & ED en L, de manière que CG soit égal à DC, CH = FC, DI = IL = ED; vous pourrez alors mener les droites GL, CI & IH; & par ce moyen vous aurez le développement de l'octaèdre. (§. 190.)

Pl. VIII.
Fig. 137. 3°. Portez 4 fois sur la ligne AB le côté du cube AI, de façon que AI = IL = LN = NB, & formez ensuite le rectangle ABDC, en sorte que AC soit égal à AI. (§. 99.) Menez les droites IR, LM, NO, parallèles à AC, & prolongez de part & d'autre IR & LM en E & F, G & H, tant que EI = IR = RF, & GL = LM = MH; vous ferez par cette méthode le développement de l'hexaèdre. (§. 182.)

Pl. VIII.
Fig. 138. 4°. Décrivez le pentagone régulier ABCDE, (§. 107) appliquez une règle sur les points D & B, & menez la droite BL; Ayant appliqué la même règle sur DA, menez la droite AG: & faites AG = AB = BL, & de l'intervalle AB faites une intersection en Q des points GL, vous formerez ainsi le pentagone ABLQG. Si vous conf-

truisez par la même méthode les quatre autres pentagones BNROC, CHGFD, DKSME, ETVIA, & les autres six a, b, c, d, e, f , vous aurez décrit le rets, chaffis, figure ou développement du *dodécaèdre*. (§. 190.)

5°. Décrivez le triangle équilatéral ACB; (§. Pl. VIII. 53.) prolongez la droite AB en D, & portez la Fig. 139. longueur de cette ligne AB quatre fois sur AD en commençant au point B; menez ensuite la droite CE parallèle à AD, (§. 67.) & faites $CI = IK = KL = LM = ME = AB$; prolongez AC en N jusques à ce que $CN = AC$; appliquez la règle sur B & I, F & K, G & L, H & M, D & E, & tirez les droites YO, SP, TQ, VR & XE; puis ayant appliqué cette même règle sur D & M, H & L, G & K, F & I, B & C, menez les droites DQ, XP, VO, TN, SC; faites enfin $MR = ME$ & $BY = BA$, & tirez les droites RE & AY: ce qui donnera la figure du chaffis de l'*isocaèdre*. (§. 190.)

6°. Transportez de B en H sur la ligne BD la largeur du *parallelipède* AB, & sa longueur de H en I, puis encore sa largeur de I en K, & sa longueur de K en D; élevez avec l'équerre au point B la hauteur du *parallelipède* AB, & achevez le rectangle BACD; (§. 99.) menez les parallèles EH, FI, GK à AB, (§. 67.) & prolongez E de part & d'autre en L & N, puis FI en M & O, jusqu'à ce que LE MF, IO & NH soient parallèles à la hauteur du *parallelipède*; c'est de cette façon qu'on forme le développement du *parallelipède*. (§. 182.)

7°. Portez sur la droite CF les côtés de la base Pl. VIII. du *prisme* CG, GH & HF; décrivez le rectan- Fig. 141. gle CAEF dont la hauteur CA est égale à la hauteur du *prisme*. (§. 99.) Construisez sur les côtés

BD & GH, AB & DE, CG & HF les triangles BKD & GIH : (§. 55.) & tout le développement du prisme fera fait. (§. 179.) Si la base étoit un pentagone, exagone, eptagone, &c. on décriroit sur BD & GH un pentagone, exagone, eptagone &c.

Pl. VIII. 8°. Du point A de la *pyramide* AE décrivez
Fig. 142. l'arc EB, & appliquez-lui les côtés de la base ED, DC, CB; menez les droites AE, AD, AC, AB. Décrivez enfin sur DC la base de la pyramide, & vous aurez le ret de la pyramide. (§. 187.)

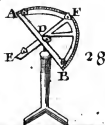
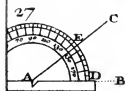
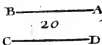
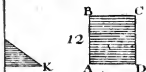
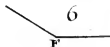
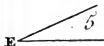
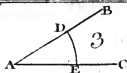
Pl. VIII. 9°. Pour avoir le ret d'un *cylindre*, décrivez un
Fig. 143. rectangle (§. 99.) dont la hauteur BC soit égale à celle du cylindre, & la longueur CF = à sa circonférence. (132.)

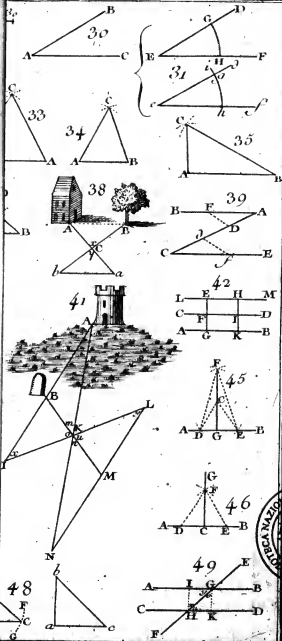
Prolongez BC en A & D, jusqu'à ce que BA & CD soient égales au Diamètre, & décrivez les cercles qui font les bases du cylindre.

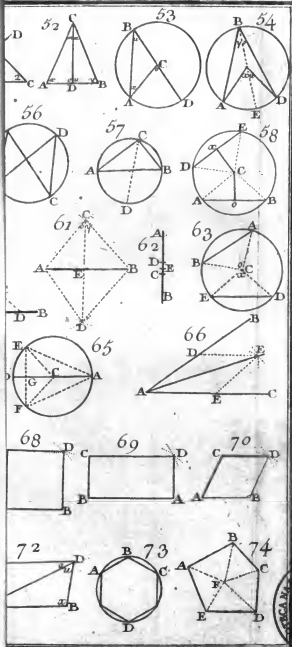
Remarque.

220. Pour coller ensemble toutes ces parties des développemens, avec lesquels vous voulez former vos corps géométriques, ayez soin d'y laisser des bords ou marges en les coupant, à peu-près comme vous le voyez par les lignes ponctuées de la figure 135; rien de meilleur que ce travail, & rien de plus utile pour faciliter la connoissance, & faire concevoir distinctement les corps géométriques aux commençans.

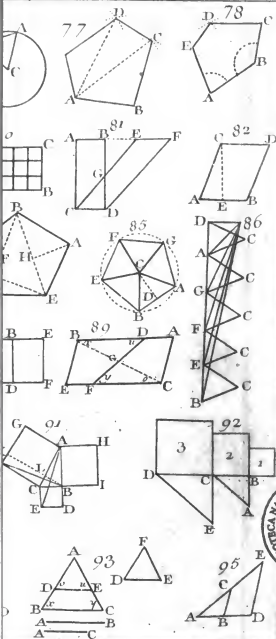
Fin de la Géométrie.

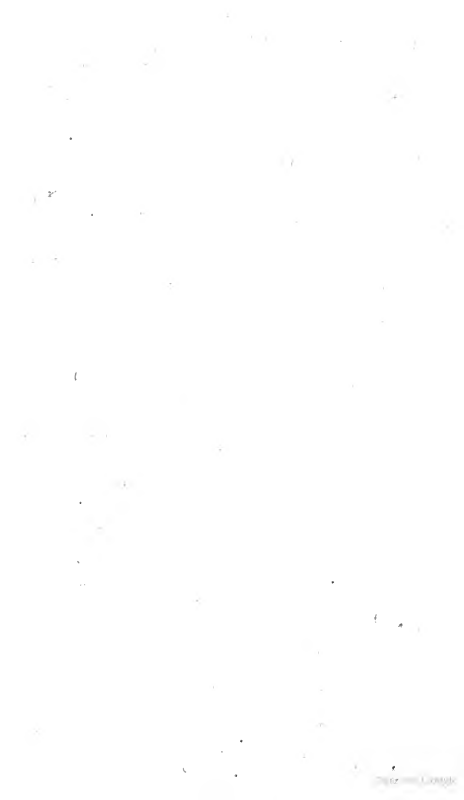








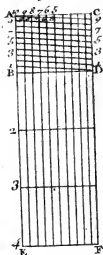




97.



98.



B



100.



101.



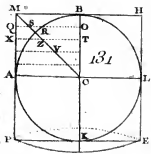
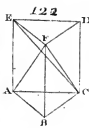
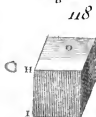
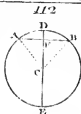
B



D







133



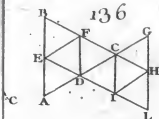
134



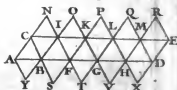
137



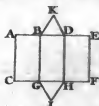
136



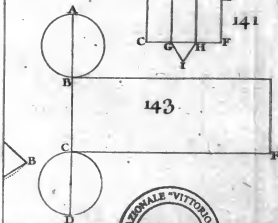
139



141



143







E L E M E N S

DE LA

TRIGONOMETRIE

RECTILIGNE.

DEFINITION I.

1. **L**A *Trigonométrie* est la science de trouver tous les côtés & les angles d'un triangle Plan. I. rectiligne par la connoissance de trois de ses par- Fig. 1. ties, dont au moins une est un des côtés du même triangle. Des deux côtés, par exemple AB & AC, & de l'un des angles C, trouver les deux autres angles A & B, aussi bien que le côté BC.

DEFINITION II.

2. La moitié de la corde AD de l'arc AB se Pl. I. nomme le *Sinus* de l'arc AE, & de l'arc AI, qui Fig. 2. font la moitié des arcs AEB & AIB.

Corollaire I.

3. Donc le sinus AD de quel arc que ce puisse être est perpendiculaire sur le rayon du cercle EC Fig. 2. (§. 95. Géom.) : & les sinus de plusieurs arcs font

par conséquent parallèles entr'eux. (§. 75. Géom.)

Corollaire II.

Fig. 1. 4. L'arc AE étant la mesure de l'angle ACE, & l'arc AI celle de l'angle ACI (§. 16. Géom.) il est évident que ces deux angles ont pour sinus AD.

Corollaire III.

5. Deux angles que l'on nomme *de suite*, c'est-à-dire posés l'un auprès de l'autre sur la même droite EI, ont donc le même sinus.

Fig. 1.

D E F I N I T I O N III.

Fig. 2. 6. On nomme *Tangente* de l'arc AE, & par conséquent de l'angle ACE, la droite EF, élevée perpendiculairement à l'extrémité du rayon EC; & on donne le nom de *Sécante* du même arc EA & du même angle ECA, à la droite FC.

D E F I N I T I O N IV.

Fig. 2. 7. Le *Sinus verse* d'un arc ou d'un angle, est la partie du diamètre comprise entre l'extrémité de l'arc & son sinus droit. Ainsi le sinus verse de l'arc AE ou de son angle ACE est la partie ED du diamètre EI; & AG = DC sinus de l'arc AH, qui pris avec l'arc EA forme 90 degrés, se nomme *Sinus du complément*, ou *cosinus*. Sa tangente HL, se nomme *tangente du complément* ou *cotangente*; la sécante enfin CL, se nomme *Sécante du complément*, ou *Cofécante* du même arc EA, ou de l'angle ACE. Quand on dit *Sinus droit* ou simplement *Sinus*, on entend la même chose.

Remarque.

L'angle de suite ACI, de l'angle ACE, se nomme complément à deux droits de l'angle ACE; & l'angle ACH qui manque à l'angle ACE Fig. 2: pour valoir un droit, se nomme complément à l'angle ACE. Il faut donc bien prendre garde de ne pas confondre ces deux sortes de complémens.

DEFINITION V.

8. Le rayon EC ou HC se nomme *S nus total*. Fig. 2:

Corollaire I.

9. Puisque le rayon HC est le sinus du quart de cercle EH, le sinus total est par conséquent le sinus de l'angle droit (§. 37. Géom.)

Corollaire II.

Il est évident que tout sinus droit, toute tangente & toute sécante appartiennent à deux arcs, lesquels Fig. 2: pris ensemble font toujours 180 degrés, ou un demi-cercle. Cela se voit clairement à l'égard du sinus AD qui appartient aussi bien à l'arc AHI, qu'à l'arc AE. Il en est de même de la tangente FE, & de la sécante FC qui appartient aussi à l'arc AHI; car si on prolonge la sécante FC, jusqu'à ce qu'elle coupe la tangente qu'on placera à l'extrémité I du diamètre EI; cette tangente & cette sécante formeront des angles dans l'arc EBI égaux à ceux qu'ils forment dans l'angle EAH.

Théorème I.

10. Le sinus de deux arcs semblables BC & EF Fig. 3 & 4.

ont le même rapport , & font en même raifon avec leurs rayons AB & ED.

Demonstration.

Si les arcs BG & EH font femblables, ils ont l'un & l'autre le même nombre de degrés, & par conféquent les angles A & D font égaux (§. 35. Géom.) Or les angles C & F font droits (§. 3.) le rayon AB eft donc au finus BC comme le rayon ED au finus EF (§. 148. Géom.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque premiere.

11. C'est pourquoi on attribue 10000000 parties au finus total de quelque cercle que ce foit , & on fuppote , par le moyen de la Géométrie , combien de ces parties fe trouvent au finus & à la tangente de chaque degré , & même de chaque minute du quart de cercle entier. C'est de cette façon qu'on a conftruit les *tables des finus & des tangentes* dont on a befoin dans la Trigonométrie , & que l'on trouve à la tête de prefque tous les traités qui ont été compofés fur cette matiere.

Remarque feconde.

12. Les finus & les tangentes font des nombres d'une étendue qui ennuye infiniment , quand il s'agit d'en faire la Multiplication ou la Divifion dans la Trigonométrie; c'est pourquoi Jean Neper Baron en Ecosfe , & après lui Henri Briggs Anglois , ont imaginé certains nombres , dont l'ufage abrege extraordinairement les grands calculs qu'il faudroit faire , fi l'on fe fervoit des nombres ordinaires; ils convertiffent la Multiplication en Addition , & la Divifion en Souffraction. On leur a donné le nom de

DE TRIGONOMETRIE. 257

de *Logarithmes*. On les trouve dans les tables des sinus & des tangentes ; non-seulement pour le calcul des sinus & des tangentes , mais encore pour celui des nombres naturels depuis 1 jusqu'à 1000 , & quelquefois davantage. Les logarithmes étant donc d'une si grande commodité, il est à propos d'en donner quelque connoissance précise , avant d'en venir aux Problèmes.

DEFINITION VI.

13. Si l'on a deux suites de nombres , l'une en proportion géométrique , l'autre en proportion arithmétique ; on nomme les derniers les *Logarithmes* des premiers.

Remarque premiere.

14. Soient les deux suites de nombre

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Les premiers se suivent en proportion Géométrique , & les seconds en proportion Arithmétique ; 0 est le logarithme de l'unité : 1 le Logarithme de 2 : 2 celui de 4 : 7 celui de 128 : 8 celui de 256 , &c.

Remarque seconde.

15. Si le Logarithme de l'unité est 0 , le logarithme du produit sera égal à la somme des produits des Logarithmes.

EXEMPLE.

La somme des Logarithmes 1 & 2 est 3 qui est le Logarithme de 8 produit de 2 multiplié par 4 ,

7 qui est la somme des Logarithmes 2 & 5, aussi bien que des Logarithmes 4 & 3, est le Logarithme de 128, produit de 4 multiplié par 32, & de 8 multiplié par 16 : c'est pourquoi le Logarithme du quarré est égal au double du Logarithme de la racine.

E X E M P L E.

4 Logarithme du nombre quarré 16 est double du logarithme 2 racine de 4 ; & 6 logarithme du nombre quarré 64 est double du logarithme 3 racine de 8. La moitié du logarithme d'un nombre est le logarithme de la racine quarrée du même nombre. Ainsi la moitié du logarithme 8 est le logarithme de la racine 16 du nombre quarré 256. Le logarithme du cube est le triple du logarithme de la racine. 9 logarithme du nombre cubique 512 est le triple du logarithme 3 racine de 8 ; & par conséquent le logarithme de la racine cubique est la troisieme partie du logarithme du nombre cubique ; 2, par exemple, logarithme de 4 est la troisieme partie de 6, logarithme du nombre cubique 64.

. Remarque troisieme.

16. Si le logarithme de l'unité est 0, le logarithme du quotient sera égal à la différence des logarithmes du diviseur & du dividende. On trouve le logarithme d'une fraction, si après avoir soustrait le logarithme du numérateur du logarithme du dénominateur, on place devant le reste le signe — qui marque la Soustraction. Ainsi 2 différence entre 5 & 7, est le logarithme du quotient 4 de 128 divisé par 32. De même 5 différence de 3 & 8 est le logarithme du quotient 32 de 256 divisé par 8.

Mais — 1 différence entre 0 & 1 est le logarithme de la fraction $\frac{1}{2}$.

Remarque quatrième.

17. On voit par ce que je viens de dire, comment à l'aide des logarithmes, on convertit la Multipliation en Addition, la Division en Soustraction, l'extraction de la racine quarrée en bipartition, & l'extraction de la racine cubique en tripartition.

Remarque cinquième.

18. Les constructeurs des tables ont pris, 0.00 000 000, 1.00 000 000, 2.00 000 000, 3.00 000 000, 4.00 000 000, pour logarithmes des nombres 1. 10. 100. 1000. 10000. & avec une peine & un travail des plus laborieux ont poussé les logarithmes, non-seulement depuis 1 jusqu'à 10000, mais jusqu'à 100000. C'est par là qu'ils ont déterminé les logarithmes des sinus & des tangentes. On trouve ces tables des Logarithmes dans M. Ozanam, &c. Les Problèmes suivans indiqueront la maniere de se servir des logarithmes.

Remarque sixième.

Pour donner une plus grande connoissance des logarithmes, il faudroit en parler fort au long; mais comme un abrégé demande qu'on ne dise précisément que ce qui est absolument nécessaire pour l'intelligence de la matiere que l'on traite, je me bornerai à la remarque suivante, parce que ceux qui voudront se mettre parfaitement au fait, pourront consulter M. Ozanam; les Elemens de Wolf; ceux de l'Abbé Deidier, &c. qui en ont traité d'une maniere fort claire.

Remarque septième.

Une suite de puissance littérale est la même que la progression géométrique; car a^0 est égal à 1, a^1 égal à 2, &c. & les puissances négatives $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, &c. sont les mêmes que celles-ci a^{-1} , a^{-2} , a^{-3} , & les exposans des puissances littérales seront les mêmes que les termes de la progression arithmétique que nous avons mis sous ceux de la progression géométrique: les logarithmes ont donc les mêmes propriétés que les exposans des puissances de a , ainsi si je veux multiplier le terme 2 de la progression géométrique par le terme 8, je n'ai qu'à ajouter ensemble les logarithmes 1 & 3 de ces deux termes, & la somme 4 sera le logarithme du produit cherché. Or, le terme de la progression géométrique écrit au-dessus de 4 est 16; donc 16 est le produit de 2 par 8. Si je veux diviser 16 par 2, je prends les logarithmes 4 & 1 de ces termes 16 & 2, & retranchant le second du premier, le reste 3 est le logarithme du quotient cherché; ainsi 8 écrit sur 3 est le quotient de 16 divisé par 2.

Pour élever le terme 2 de la progression géométrique à sa quatrième puissance, je multiplie le logarithme 1 du terme 2 par l'exposant 4 de la quatrième puissance de 2: ainsi le terme 16 écrit au-dessus de 4 est la quatrième puissance cherchée.

Pour extraire la racine cubique de 8, je prends son logarithme 3, & le divisant par l'exposant 3 de la racine cubique, le quotient 1 est le logarithme de la racine cubique de 8, & par conséquent le terme écrit au-dessus de 1 est la racine cherchée. Ainsi ce qu'il faudroit faire par la Multiplication &

DE TRIGONOMETRIE. 261

la Division, en opérant sur les termes de la progression géométrique, on le fait par l'addition & la soustraction, & ce qu'il faudroit faire par l'élévation des puissances ou l'extraction des racines, on le fait par la Multiplication & la Division.

Comme il se trouve entre les termes d'une progression géométrique beaucoup de nombres qui ne sont point en progression, & qui par conséquent n'ont point de logarithmes, on y a pourvu par les logarithmes des nombres naturels 1. 2. 3. 4. &c. en cette sorte. On a pris la progression géométrique décimale :: 10, 100, 1000, 10000, &c. mais comme il a fallu extraire des racines pour trouver les logarithmes des nombres 1 & 10 pour éviter les restes, on a augmenté tous les termes de leur progression, & leurs logarithmes de plusieurs zéros, en mettant un point devant pour distinguer les logarithmes d'avec les zéros ajoutés, comme 1. 0000000, ou 10. 0000000, &c. & leurs logarithmes 0. 0000000, 1. 0000000, &c. On a nommé *Caractéristique* le caractère qui se trouve devant ce point.

Théorème II.

19. Dans tout triangle ABC, les côtés sont Pl. I.
comme les sinus des angles opposés. Fig. 5.

Démonstration.

Si on conçoit un triangle inscrit dans un cercle (ce qui se peut toujours faire) (§. 97. Géom.) la moitié de l'arc AB fera la mesure de l'angle C (§. 84. Géom.) & ainsi la moitié du côté AB sera son sinus (§. 2.) Semblablement la moitié de l'arc AC est la mesure de l'angle B, & par conséquent la moitié du côté AC sera le sinus de l'angle B : donc le

R iij

côté AC est au sinus de l'angle opposé B comme le côté AB est au sinus de l'angle C qui lui est opposé (§. 59. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème I.

Fig. 5. 20. Les deux angles A & C, & le côté AB étant connus, trouver le côté BC.

Solution.

Dites (§. 19.) le sinus de l'angle A est au côté qui lui est opposé BC comme le sinus de l'angle C au côté AB qui lui est opposé.

Soit, pour exemple $C = 48^{\circ} 35'$, $A = 57^{\circ} 28'$, $AB = 74'$: on opere ainsi par les logarithmes.

Log. Sin. C . . . 9.	8750142
Log. AB 1.	8692317
Log. Sin. A. . . . 9.	9258681
Somme 11.	7950998

Log. BC 1. 9200856 auquel répond directement dans les tables 83'.

Remarque premiere.

21. Si non content d'avoir le nombre des pieds, vous voulez encore des pouces, cherchez le même logarithme de BC sous le caractèreistique 2 après 830: vous trouverez que le logarithme 832 est celui qui en approche le plus, & ainsi vous verrez qu'outre 83 pieds, il y a encore deux pouces. Voulez-vous avoir même des lignes? cherchez encore le même logarithme sous le caractèreistique 3 après 8320, & vous trouverez que le logarithme qui

DE TRIGONOMETRIE. 263

en approche de plus près est $83^{\circ} 20'$; & par conséquent que le côté BC fera de $8^{\circ}, 3', 2'', 1'''$. Il faut toujours suivre cette méthode, quand le logarithme ne se trouve pas assez exactement sous le caractèreistique.

Remarque seconde.

22. Comme on résout le Problème par la Règle de Trois (§. 85. Arithm.) il faudroit multiplier le sinus A par le côté AB, & diviser le produit par le sinus de l'angle C ; il est évident qu'il faut ajouter le logarithme du côté AB au logarithme du sinus A, & qu'il faut ensuite soustraire de la somme le logarithme du sinus C. (§. 15. & 16.)

Problème II.

23. Les deux côtés AB & BC avec l'angle C Pl. I. opposé à un des deux AB, étant connus trouver Fig. 5. les autres angles.

Solution.

Dites (§. 19.) : le côté BC est au sinus de l'angle cherché A qui lui est opposé, comme le côté AB est au sinus de l'angle donné C qui lui est opposé.

EXEMPLE.

Soit $AB = 82'$, $BC = 75'$, $C = 64^{\circ} 33'$.
Vous ferez le calcul de la façon suivante.

Logar. AB 1. 9138138

Logar. du Sin. C. . 9. 9556688

Logar. de BC. . . . 1. 8750613

Somme de AB & de C 11. 8307301

Logar. du Sin. A. . 9. 9169163 auquel
répond de plus près $55^{\circ} 40'$.

Remarque premiere.

24. Si vous n'avez pas assez de $55^{\circ} 40'$, vous
pourrez faire une seconde opération comme il s'en-
suit.

Soustrayez du logarithme trouvé 9. 9169. 163

• Le moindre qui en approche le
plus près 9. 9168. 593

Et marquez la premiere différence . 570

Soustrayez aussi du plus prochain &
plus grand que le logarithme trouvé 9. 9169. 455

Le moindre 9. 9168. 593

Et marquez la différence 862

Dites : 862 donnent 60", combien donneront 570
60

34200

862) 34200 (39"

2586

8340

7758

582

Après quoi vous trouverez 39". L'angle A est
donc de $55^{\circ} 40' 39''$.

Remarque seconde.

25. Les deux angles A & C étant connus, on trouve le troisième par le moyen de la géométrie. (§. 77. Géom.) comme on le voit par l'Exemple suivant.

	C	=	64°	33'	0"
	A	=	55	40	39
.	A + C		120	13	39
	A + C + B		179	59	60
	B		59	46	21

Problème III.

26. Connoissant dans un triangle rectangle les Pl. I. côtés AB & BC qui forment l'angle droit B, Fig. 6. trouver les autres angles.

Solution.

Ayant pris BC pour le sinus total, AB fera la tangente de l'angle C (§. 6.) Dites donc : le sinus total est à la tangente de l'angle C comme un des côtés BC est à l'autre AC.

E X E M P L E.

Soit BC de 79'; AB de 54'; le calcul fera tel

Logar. de BC	I.	8976.	271
Logar. de AB	I.	7323.	938
Logar. du sinus total . .	10.	0000.	000

Logar. de la tangente C. 9. 8347667, qui dans les tables appartient à 34° 21'. L'angle C est donc de 34° 21; & l'angle A 55° 39 (§. 75. Géom.)

L E M M E.

27. Si l'on ajoute la moitié de la différence de deux nombres ou quantités à la moitié de leur somme, on aura le plus grand nombre des deux ; si au contraire on retranche cette demi-différence de la moitié de la somme, le nombre qui reste est précisément le plus petit des deux.

Démonstration.

Le plus grand de deux nombres est composé du plus petit & de leur différence ; la somme des deux est donc composée du plus petit pris deux fois , & de leur différence. C'est pourquoi la demi-somme étant composée du plus petit nombre & de la moitié de la différence ; si on ajoute la demi-différence à la moitié de la somme , on aura le plus grand des deux nombres ; & au contraire si on ôte cette demi-différence , le reste exprimera le plus petit des deux nombres proposés. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème IV.

Pl. I.
Fig. 7

28. Connoissant les deux côtés AC & CB d'un triangle avec l'angle C qui les forme , trouver les autres angles.

Solution.

1°. Dites : la tangente de la demi-somme des angles cherchés A. & B est à la tangente de la moitié de leur différence , comme la somme des côtés AC & CB est à leur différence entière.

2°. Ajoutez la demi-différence à la moitié de leur somme, la nouvelle somme qui en viendra fera l'angle B opposé au plus grand AC des deux côtés

somme des angles cherchés est à BG tangente de la demi-différence, comme DA somme des côtés AC & CB est à EA qui est leur différence (§. 149. Géom.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème V.

29. Connoissant les trois côtés d'un triangle, trouver les angles.

Solution.

Fig. 8.

1°. Du sommet de l'angle A décrivez un cercle par le plus petit côté AB; & parce que $AD = AB$ vous aurez aussi $AF = AB = AD$ (§. 27. Géom.) CD sera la somme des côtés AC & AB, & CF leur différence.

2°. Dites : la différence FC des côtés AB & AC est au segment de la base GC comme la base BC du triangle est à la somme de ses côtés $AB + AC$.

3°. Soustrayez CG de la base BC pour avoir le reste BG.

4°. Abaissez de A la perpendiculaire AE sur la corde BG; vous aurez $BE = EG = \frac{1}{2} BG$ (§. 95. Géom.); ayant donc les côtés AB & BE du triangle rectangle AEB, on peut trouver les angles A & B; & dans l'autre ACE, ayant les côtés AC & CE, on trouve aussi les angles C & A. (§. 23.)

E X E M P L E.

Soit $AB = 36'$, $AC = 45'$, $BC = 40'$. Tel est le calcul

$$\begin{array}{rcl}
 AB & = & 36' \\
 AC & = & 45' \\
 \hline
 AB + AC & = & 81
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 AC & = & 45' \\
 AB & = & 36' \\
 \hline
 FC & = & 9
 \end{array}$$

DE TRIGONOMETRIE. 269

Log. de BC 1. 6020600
 Log. de AB+AC . . 1. 9084850
 Log. de FC 0. 9542425

Somme 2. 8627275

Log. de GC 1. 2606675, auquel
 répondent dans les tables 18'. Si vous le voulez
 plus exact (§. 21) & que vous augmentiez vos re-
 cherches, vous trouverez enfin GC de 1822^m.

BC=4000 ^m	EG=1089 ^m
GC=1822	GC=1822
BG=2178 ^m	EC=2911 ^m

BE=1089 ^m	
Log. de AB	3. 5563025
Log. du sin total . .	10. 0000000
Log. de EB	3. 0370279

Log. du sin. A 9. 4807254, auquel
 répond dans les tables le logarithme 17° 36' & par
 conséquent l'angle B de 72° 24'.

Log. de AC	3. 6532125
Log. du sin total . .	10. 0000000
Log. de EC	3. 4640422

Log. du sinus A 9. 8108297, auquel
 répond dans les tables le logarithme 40° 19'; &
 l'angle C sera donc de 49° 41'. Par conséquent
 dans le triangle ABC l'angle A est de 57° 55', B
 de 72° 24', & l'angle C de 49° 41'.

Démonstration.

J'ai à démontrer que CB est à CD, comme CF
 est à CG: on va le voir clairement.

Puisque la mesure del'angle y ou GBD est la moi-

tié de l'arc GFD , & la mesure de l'angle x la moitié de l'angle GBD (§. 84. Géom.) ; on aura $x + y = 180^\circ$. Mais $x + o$ est aussi $= 180^\circ$ (§. 38. Géom.) Donc $o = y$ (§. 25. Arithm.) , & comme l'angle C est commun aux deux angles CGF , & CBD , on aura $CB : CD = CF : CG$ (§. 148. Géom.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque premiere.

30. Comme on a donné BE & EC en lignes , il a fallu aussi prendre dans le calcul 3600^m pour AB au lieu de 36 , & 4500^m pour AC au lieu de 45.

Remarque seconde.

31. Nous donnerons encore quelques éclaircissements sur l'usage de la Trigonométrie pour la résolution de divers problèmes de la Géométrie. C'est pourquoi nous ajoutons l'Appendice suivant.

A P P E N D I C E.

Problème I.

32. Trouver la hauteur , par exemple d'une tour , accessible du côté qu'on aura choisi pour station.

Solution.

- Fig. 9. 1°. Mesurez l'angle ADC (§. 43. Géom.) & la droite BE ou DC (§. 44. Géom.)
2°. On connoîtra la valeur de l'angle A , parce que l'angle C est droit (§. 75. Géom.)

3°. Ayant connu cet angle A, on trouvera la ligne AC (§. 20).

4°. Ajoutez à cette ligne la hauteur $DE = BC$; & comme les droites CD & BE sont parallèles, & CB & ED perpendiculaires à BE, on aura la hauteur AB. Mais si BE n'étoit pas horizontal, il faudroit mesurer BC en particulier (§. 171. Géom.)

Problème II.

33. Mesurer la hauteur inaccessible AB.

Pl. I.
Fig. 10.

Solution.

1°. Choisissez les deux stations E & G, d'autant plus éloignées l'une de l'autre, que la montagne, tour, ou arbre qu'on veut mesurer ont plus d'élévation: de-là mesurez les angles ADC & AFC (§. 43. Géom.), ensuite la longueur des distances GE ou DF (§. 44. Géom.)

2°. Retranchez de l'angle AFC l'angle ADF; le reste sera l'angle FAD (§. 74. Géom.)

3°. Cherchez le côté AF, par le moyen de la connoissance acquise des parties du triangle AFD, des angles & du côté FD.

4°. Cherchez ensuite le côté AC par l'angle F, & le côté AF connus du triangle rectangle (§. 20).

5°. Ajoutez enfin la hauteur de l'instrument DE à la hauteur AC, ou si BC n'étoit pas égal à la hauteur de l'instrument, trouvez FC, & puis BC, dans le triangle rectangle FBC (§. 20): vous aurez alors la hauteur demandée AB.

Problème III.

34. Des deux fenêtres E & F placées à deux dif-

Pl. I.
Fig. 11.

férens étages d'une maison, mesurer une hauteur dont on peut voir le sommet A des deux fenêtres cy-dessus.

Solution.

1°. Prenez par le moyen d'un plomb suspendu à une corde, les degrés d'élevation de la fenêtre la plus haute E, au-dessus de la plus basse F, & puis la hauteur de la même fenêtre F au-dessus de la terre G, & ensuite des fenêtres mesurez la quantité des angles AEC & AFD (§. 43. Géom.)

2°. Ajoutez l'angle AEC à 90°, & vous aurez l'angle AEF; soustrayez de 90 degrés l'angle AFD, le reste sera la valeur de l'angle AFE.

3°. Ajoutez l'angle AEF à l'angle AFE, & retranchez la somme de 180°, ce qui restera donnera l'angle EAF (§. 77. Géom.)

4°. Cherchez dans le triangle AEF le côté AF.

5°. Ensuite dans le triangle AFD le côté AD (§. 20.)

6°. Ajoutez enfin à celui-ci l'élevation de la fenêtre au-dessus de la terre; ou si GB n'étoit pas horizontal, c'est-à-dire, une ligne droite parallèle à l'horizon; mesurez la ligne DF, & puis par le moyen de l'angle trouvé DFB (§. 43. Géom.) mesurez à part DB (§. 20); & de cette façon vous aurez la hauteur AB.

Problème IV.

35. Mesurer la distance de deux lieux A & B, tous deux accessibles d'un troisième C.

Solution.

1°. Mesurez l'angle C (§. 43. Géom.) & puis les lignes AC & CB (§. 44. Géom.)

2°

DE TRIGONOMETRIE. 273

2°. Toutes ces choses étant connues, vous trouverez la valeur de l'angle A (§. 28) & par le (§. 20) vous pourrez trouver la distance demandée AB.

Problème V.

36. Trouver la distance de deux lieux AB dont Fig. 13. un seul B est accessible par un troisième C.

Solution.

1°. Prenez la mesure des angles C & B (§. 43. Géom.) ensuite la mesure de la ligne BC (§. 44. Géom.), & par ce moyen vous trouverez la distance AB, qui vous donnera la largeur de la rivière qui est entre-deux (§. 20).

Problème VI.

37. Trouver la distance de deux lieux inaccessibles AB. Fig. 14.

Solution.

1°. Ayant choisi à volonté trois stations DCE sur la même ligne droite, mesurez les angles ADC, ACD, BCE & BEC (§. 43. Géom.), & puis les lignes DC & CE (§. 44. Géom.)

2°. Retranchez de 180° la somme des angles ADC & ACD, & encore de ACD & BCE, aussi bien que de BCE & BEC; dans le premier cas le reste est la valeur de l'angle DAC, dans le second, celle de l'angle ACB; & dans le troisième la valeur de l'angle CBE (§. 77. 38. Géom.)

3°. Trouvez à l'aide de ces connoissances les côtés AC & BC (§. 20.) & par le (§. 28.) l'angle CAB, & enfin le côté AB (§. 20.)

Problème VII.

38. Trouver le rapport du diamètre d'un cercle à sa circonférence.

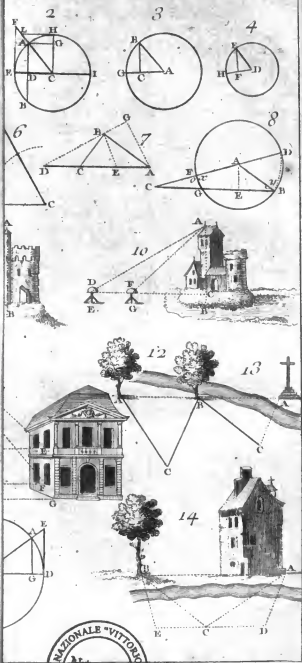
Solution.

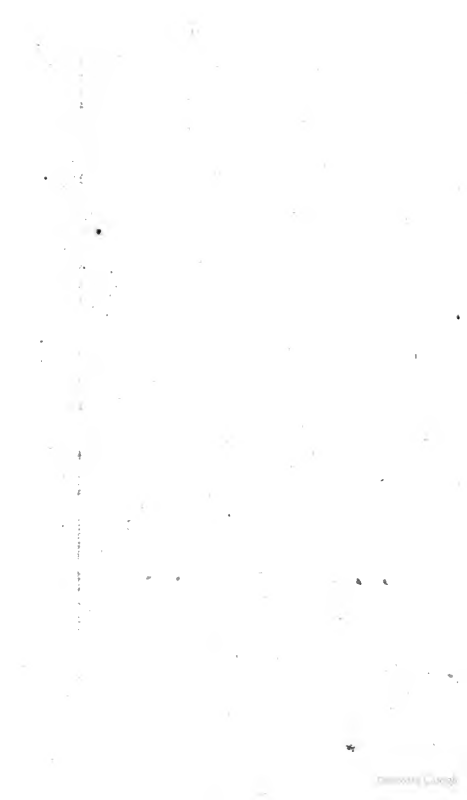
Fig. 15.

1°. Si le rayon du cercle CD est 10000000, le sinus AG aussi bien que la tangente ED fera un arc d'une minute DA 2909 à peu-près : ainsi l'arc AD un peu plus grand que AG, & un peu moindre que ED doit être aussi à-peu-près de 2909. Multipliez 2909 par 21600, c'est-à-dire, par le nombre entier des minutes contenues dans la circonférence entière : le produit sera 62834400 ; le diamètre du cercle est donc à sa circonférence, comme 20000000 est à 62834400, ou peu s'en faut ; c'est-à-dire, (en divisant l'un & l'autre par 200000) comme 100 est à 314. (§. 59. Arithm.)

Fin de la Trigonométrie.

Trigonometrie







E L E M E N S

D E

M E C A N I Q U E.

D E F I N I T I O N I.

1. **L**A *Mécanique* est la science de mouvoir les corps avec de moindres forces & en moins de tems, c'est-à-dire, qu'une puissance dirigée par les règles de cette science, produit un mouvement & plus grand, & plus accéléré que ne feroit une autre puissance simplement appliquée.

Remarque.

2. La *Mécanique*, selon la définition de quelques Auteurs, traite proprement de toutes les loix du mouvement; mais communément on restreint cette science aux machines, par le moyen desquelles la force mouvante devient plus capable de remuer une plus grande masse, ou de produire un mouvement plus accéléré.

D E F I N I T I O N I I.

3. On appelle *force* ou *puissance* ce qui produit

S ij

le mouvement. Ce qui reçoit le mouvement ou qui lui résiste, se nomme *masse* ou *poids*.

Corollaire I.

4. C'est pourquoi on met au nombre des forces mouvantes toutes les créatures animées & inanimées : comme les hommes, les brutes, l'air, l'eau, le feu, les poids & les corps élastiques.

Corollaire II.

5. Puisque la Mécanique enseigne à produire un mouvement abrégé par le moyen d'une puissance, il faut qu'elle apprenne de quelle manière on doit appliquer les hommes, les brutes, l'air, l'eau, le feu, &c. pour produire ce mouvement.

DEFINITION III.

6. On appelle *force* ou *puissance vive* celle qui produit un mouvement actuel. Si cette puissance n'est qu'un poids soutenu, on la nomme *force* ou *puissance morte*, ou qui *soutient*.

DEFINITION IV.

7. Par le nom de *Machine* on entend tout ce qui a la puissance d'abréger le mouvement.

DEFINITION V.

8. Le *levier* est une ligne droite & roide, distinguée par trois points principaux ABC. A marque celui où est appliqué le fardeau qu'on veut mouvoir. C celui de l'appui, & B celui de la puissance.

Remarque I.

9. Il est bon d'observer en général que quand on examine la force ou les propriétés d'une machine, on ne considère point la matiere dont cette machine est composée, ni la nature de la matiere, ni les différentes formes que cette machine peut prendre dans d'autres circonstances, mais seulement ce qui constitue l'essence d'une telle machine, afin de connoître quelles machines sont nécessaires dans le cas dont il s'agit; car si par un trop grand ou trop long usage la matiere, la forme, ou quelques autres obstacles empêchoient que la machine eût tout son effet essentiel, cela ne doit point être regardé comme provenant de ses principes qu'on doit considérer séparément.

Corollaire.

10. Toutes les fois qu'on peut concevoir trois points dans le mouvement d'une machine, l'un auquel ce mouvement se fait, le second auquel la puissance est appliquée, & le troisième qui soutient le poids, on concevra alors que cette machine est un levier.

Remarque II.

11. Cela bien considéré, on pourra non seulement porter un jugement exact sur presque tous les instrumens, & les autres ouvrages de l'art; mais encore rendre raison des mouvemens surprenans des animaux, & calculer toutes leurs forces; c'est sur ce fondement qu'est établi tout ce que Borelli a écrit sur le mouvement des animaux.

DEFINITION VI.

Pl. I.
Fig. 2.

12. L'*aissieu* dans *sa roue* est la roue AFDA dont les rayons sont attachés fixément à un cylindre, avec lequel elle peut tourner autour du centre commun C. Il suffit même, pour comprendre cette figure, de concevoir le cercle que décrit le cylindre lorsqu'il tourne sur son axe.

Corollaire.

Pl. I.
Fig. 3.

13. On peut encore rapporter à l'*aissieu* dans *sa roue*, le cercle que forme le cylindre tournant sur son axe, lorsque l'on conçoit que ce cercle est plus grand que le plan de la section. Par exemple, dans la Mécanique, les *Cabestans ordinaires* FGHI sont du même genre que l'*aissieu* dans *sa roue*, parce que la traverse IH, qui dans le mouvement du cylindre tourne sur son axe FG, décrit un cercle. (§. 11. Géom.)

Remarque.

14. Lorsque l'on veut faire usage des roues, on les construit de différentes façons, selon la différente manière de communiquer la force, ou selon la différente forme des corps que l'on veut mouvoir.

DEFINITION VII.

Pl. I.
Fig. 4 & 5.

15. La roue qui doit tourner avec un autre corps est garnie de dents ou de fuseaux. On appelle *Roue étoilée* celle qui porte ses dents sur la surface de sa circonférence, & *roue dentelée*, celle qui a ses dents placées au côté de sa *jante* ou circonférence.

DEFINITION VIII.

16. Le *Tambour* ou *Tympan* est une roue à laquelle une autre donne le mouvement par le moyen de ses dents.

DEFINITION IX.

17. Si l'on forme le tambour de deux disques Pl. I. KL & MN, & qu'à la place des dents on y mette Fig. 4. des fuseaux ; on appelle cette machine une *lanterne*.

DEFINITION X.

18. La *poulie* qu'on nomme encore le *rond* du *polispate* est un cercle ou un rond qui tourne autour de son centre C, pendant que la puissance D tire Pl. I. en haut le poids E. Fig. 6.

DEFINITION XI.

19. On appelle *plan incliné* AC, celui qui fait un Pl. I. angle oblique ACB avec la ligne horizontale. Fig. 7.

DEFINITION XII.

20. Si ce plan tourne autour d'un cylindre il forme une *vis* ; la *vis* mâle ou simplement la *vis*, est Pl. I. celle qui a ses élévations à la surface extérieure du Fig. 8. Cylindre IK.

DEFINITION XIII.

21. La *vis femelle* LM est celle qui a les élévations à la surface intérieure d'un cylindre creusé à Pl. V. jour. On donne encore à cette vis le nom d'*ecroue*. Fig. 8.

Sjv

D E F I N I T I O N X I V .

Pl. I.
Fig. 1.

22. Le point C , autour duquel la machine peut se mouvoir , est appelé *centre du mouvement* ou *centre du repos*.

D E F I N I T I O N X V .

Pl. I.
Fig. 1.

23. La *ligne de direction* est une ligne droite , le long de laquelle une puissance ou une masse est en mouvement actuel , ou pourroit être en mouvement , si elle n'étoit empêchée par quelque cause. Par exemple , si le fil qui soutient le poids O est coupé au point A , le poids doit tomber & décrira la ligne AO ; cette ligne est celle qu'on nomme *ligne de direction* de ce poids. Pareillement si la puissance tire en H le long de la ligne BH , la *ligne de direction* de cette puissance sera BH.

D E F I N I T I O N X V I .

Pl. I.
Fig. 1.

24. La *distance du centre du mouvement* est la ligne CD , qui est menée perpendiculairement du centre du mouvement C , à la ligne de direction BH.

Corollaire.

25. C'est pourquoi , si la puissance & la masse sont appliquées sous l'angle droit de la machine , elles seront plus éloignées du centre du mouvement ; car si la ligne de direction BE fait un angle droit avec la machine AB , la distance sera CB ; si elle fait un angle oblique CBH , la distance sera CD ; mais dans un triangle rectangle CBH la ligne CB est plus grande que la ligne CD. (§. 144. Géom.)

DEFINITION XVII.

26. Le *centre de gravité* est le point où le corps se divise en deux parties, qui n'ont pas plus de pesanteur l'une que l'autre.

DEFINITION XVIII.

27. Le *centre de grandeur* est le point, où le corps est comme partagé en deux parties égales.

DEFINITION XIX.

28. La *ligne horizontale* est celle dont tous les points sont également éloignés du centre de la terre.

Corollaire I.

29. La *ligne horizontale* est, à proprement parler, l'arc d'un cercle décrit du centre de la terre.

Corollaire II.

30. Comme dans les grands cercles surtout, les Fig. 9.
soutendantes, ou les cordes des petits arcs, sont presque la même chose que ces petits arcs, ou n'en diffèrent point sensiblement. (§. 126. Géom.) La ligne droite MP qui touche la vraie ligne horizontale au point donné C, est prise elle-même pour la ligne horizontale.

DEFINITION XX.

31. La *ligne horizontale apparente* MP, est Fig. 9.
celle qui touche la vraie ligne horizontale au point donné C.

D E F I N I T I O N X X I .

32. La *gravité des corps* est cette force qui pousse les corps au centre de la terre.

Théorème I.

Pl. I.
Fig. 10.

33. Si le corps DE est suspendu sur la ligne AB, de façon que cette ligne passe par le centre de gravité, ce corps doit être en repos ; il y sera pareillement s'il est appuyé sur le centre de gravité.

Démonstration.

Le corps étant coupé en deux parties d'égale pesanteur par le centre de gravité, la partie E pèse autant de son côté que la partie D pèse du sien, il n'y a donc aucune raison pourquoi la partie D seroit plutôt élevée que la partie E ; ni l'une ni l'autre ne sera par conséquent élevée ; donc le corps grave doit être en repos. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

34. Donc ce qui soutient le centre de gravité, soutient aussi tout le poids du corps qui y est appuyé.

Corollaire II.

35. De-là on peut concevoir toute la pesanteur d'un corps comme rassemblée au centre de gravité.

Théorème II.

36. Dans les corps homogènes, (c'est-à-dire , dont toutes les parties sont d'une même matière ,

qui n'est ni plus ni moins condensée, & qui ont même largeur & même grosseur,) le centre de gravité est le même que le centre de grandeur.

Démonstration.

Car dans ce cas il n'y a point de raison pourquoi des parties égales en grandeur ne pèseront pas également ; elles ont donc une égale pesanteur ; ainsi un corps étant divisé en deux parties également grandes, par le centre de grandeur, & en deux parties également pesantes par le centre de gravité, le centre de gravité sera donc au même point que le centre de grandeur. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème I.

37. Déterminer le centre de gravité de quelque corps que ce soit.

Solution du problème.

1°. Mettez le corps donné HI sur une corde tendue, ou sur la pointe d'un prisme triangulaire FG ; remuez-le jusqu'à ce qu'il reste en équilibre, vous trouverez le centre de gravité dans la ligne KL, sur laquelle il sera posé. (§. 34.) Fig. 11.

2°. Que si vous placez ce même corps sur la même corde, ou sur le même prisme selon la ligne MN, vous trouverez encore le centre de gravité au point O, où les deux lignes se coupent. (§. 34.)

3°. On le trouve également en mettant un corps sur la pointe d'un poinçon, en le changeant de position jusqu'à ce qu'il soit en équilibre ; un plat, une assiette, par exemple, sur la pointe d'une fourchette ou d'un couteau.

Théorème III.

38. Si la ligne de direction tombe sur la base sur laquelle ce corps est posé, il doit rester immobile, & il ne sçauroit tomber; mais si-tôt que la ligne de direction s'éloignera de la base, le corps tombera du côté vers lequel la ligne de direction se porte.

Démonstration.

La ligne de direction est une ligne droite selon laquelle un corps se meut actuellement, comme dans le cas présent, ou se mettroit en mouvement s'il n'en étoit empêché. (§. 23.) Or si cette ligne tombe sur la base d'un corps, ce corps ne peut se mouvoir selon cette ligne; il restera donc immobile. *Ce qui étoit d'abord à prouver.* Mais si la ligne de direction tombe hors de la base d'un corps, rien n'empêche que ce corps ne soit en mouvement en suivant cette ligne: il doit donc tomber. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

39. Plus donc la base sur laquelle un corps est placé se trouve grande, plus on aura de peine à faire tomber ce corps, parce que la ligne de direction a un grand espace à parcourir avant de tomber hors de cette base.

Lemme.

Pl. I.
Fig. 9.

40. La ligne droite MP qui touche le cercle au point C fait avec le rayon un angle droit au point de l'attouchement C.

Démonstration.

Supposons que le rayon CL ne soit point perpendiculaire à la ligne MP, on pourra donc tirer du point L une autre perpendiculaire à la ligne MP; par exemple, la ligne LP; (§. 69. Géom.) & parce que l'angle P est un angle droit, la ligne LC fera donc plus grande que la ligne LP. Mais comme la ligne LC est la même que la ligne LN, la ligne LN feroit donc plus grande que la ligne LP; ce qui étant absurde, l'angle qui se forme au point C doit être un angle droit. *Ce que j'avois à démontrer.*

Théorème IV.

41. La ligne de direction des corps graves est perpendiculaire à la ligne horizontale apparente.

Démonstration.

Les corps graves tendent par la force de la gravité vers le centre de la terre; (§. 32.) par conséquent leur ligne de direction est la même que le rayon de la terre CL. (§. 23. Méch. & §. 13. Géom.)

La ligne horizontale apparente MP touche la circonférence de la terre au point C, (§. 31.) La ligne de direction des corps graves, doit donc faire un angle droit avec la ligne horizontale apparente; (§. 40.) elle lui est par conséquent perpendiculaire. (§. 18. Géom.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

42. Comme toute la pesanteur des corps est ras-

semblée dans le centre de gravité ; (§. 35.) c'est de ce centre qu'il faut tirer perpendiculairement la ligne de direction des corps graves, jusqu'à la ligne horifontale apparente.

Problème II.

43. Trouver si un corps grave placé dans quelque endroit tombera, ou non.

Solution.

1^o. Il faut chercher le centre de gravité. (§. 37.)

2^o. Tirez ensuite de ce centre une ligne perpendiculaire sur la ligne horifontale apparente. (§. 69. Géom.) si la ligne perpendiculaire tombe dans la base du corps, il ne tombera pas. Si elle s'écarte de la base, le corps tombera du côté où la ligne perpendiculaire s'éloigne de la base.

Démonstration.

La ligne perpendiculaire ayant été menée du centre de gravité vers la ligne horifontale apparente; elle sera la ligne de direction du corps. (§. 42.) Si elle tombe dans la base, le corps ne sçauroit tomber; si au contraire elle s'en éloigne, le corps doit tendre dans son mouvement vers le côté où tombe la ligne de direction. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

44. Par la solution de ce problème, on peut rendre raison de toutes les positions & de toutes les façons de marcher possibles des hommes & des ani-

maux , comme l'a fait M. Borelli dans son ouvrage du Mouvement des animaux , part. 1. prop. 145. & suivantes.

Théorème V.

45. Si l'on suspend aux deux extrémités AC du Pl. I. levier ABC deux poids inégaux GF , qui seront en même raison , que leurs distances réciproques le sont à l'égard du point d'appui B ; l'un & l'autre sont en équilibre , & ils ne sçauroient se mettre en mouvement. Fig. 12.

Démonstration.

Supposons par exemple , que le poids F pèse une livre , & le poids G trois livres , que les lignes de direction CF , & AG soient perpendiculaires à CA aux points A & C ; les degrés de distance du poids F , qui ne pèse qu'une livre , se compteront depuis B , jusqu'à C , & ceux du poids G se compteront de A en B ; (§. 24.) par conséquent dans notre hypothèse $AB : BC = 1 : 3$. & comme les corps ne perdent rien de leur pesanteur , quelque changement qui se fasse dans leur figure , imaginons ces deux poids changés en deux cylindres , qui ayent une grosseur relative à chacun d'eux , de façon qu'une demi-livre de ce cylindre reçoive la longueur de la moindre distance AB ; ainsi le cylindre IK , auquel a été changé le moindre poids F , contiendra deux parties égales à AB ; & l'autre cylindre HI , qui a été fait du gros poids G , en contient six parties ; que si l'on imagine la ligne BC prolongée vers D , jusqu'à ce que la distance de CD soit égale à la distance AB ; & au contraire , si l'on imagine la ligne AB prolongée vers E jusqu'à ce que la distance AE soit égale à la distance

BC, la ligne ED sera égale à la longueur de tout le cylindre HK : Or la ligne ED est divisée en deux parties égales au point B, puisque depuis B jusqu'à E il y a quatre parties égales à AB, comme depuis B jusqu'à D. Le centre de gravité du cylindre HK, étant le même que son centre de grandeur, (§. 36.) la ligne BM à laquelle il est suspendu, passe par son centre de gravité; le cylindre est donc en repos, (§. 33.) par conséquent ni l'un ni l'autre des deux cylindres HI, & IK ne doit l'emporter de même que les deux poids dont ils ont été formés; ils doivent donc avoir la même pesanteur. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire

46. C'est pourquoi, si les poids FG doivent être égaux, les distances AB & BC, doivent être aussi égales : Car, $F : G = AB : BC$. donc si $F = C$, AB le sera aussi à BC. (§. 53. Arithm.)

Remarque.

47. Toutes les démonstrations que l'on peut faire dans toute la Mécanique, sont appuyées sur ce seul Théorème: c'est pour le rendre plus familier, à l'exemple de Jungnickelius, (Clef de la Mécanique pag. 107. 108.) que je vais faire voir comment on peut le prouver par l'expérience.

Problème III.

48. Examiner la loi fondamentale de la Mécanique, ou mettre en expérience le précédent Théorème.

Solution.

Solution.

1°. Faites travailler par un Menuisier un solide en forme de prisme quadrangulaire, dont la largeur excède la grosseur, & dont on puisse séparer 8 parties de même longueur; & de plus une partie d'une longueur double, une autre d'une triple, & une enfin d'une longueur quadruple.

2°. Mettez la partie qui a une longueur double Pl. I. sur la pointe d'un prisme triangulaire, vous verrez Fig. 13: qu'elle restera en équilibre si la partie AC est égale à la partie CB.

3°. Que si vous placez sur le même prisme la partie qui a une longueur triple DE, de façon que FD comprennent deux parties, & EF une seule; il faudra, pour que DE soient en équilibre, que vous ajoutiez trois parties de la longueur simple sur la partie FE.

4°. Pareillement si vous mettez sur la pointe du prisme la partie d'une longueur quadruple GH, de façon que GI ait trois parties, & que HI n'en ait qu'une seule, il en faudra ajouter 8 autres sur HI, pour que GH soit en équilibre.

Toutes ces expériences sont conformes à la loi fondamentale, que j'ai donnée dans la démonstration du Théorème précédent.

Démonstration.

Supposons que les parties des divisions AC & CB, DF & FE, GI & IH, n'ont aucune pesanteur, & qu'à la place de ces pesanteurs, on les suspende aux centres de leurs gravités, qui se trouvent au milieu (§. 36.) des poids, qui égalent en même-tems la pesanteur des parties, & celle des

T

divisions qu'on auroit mises dessus. (§. 35.) comme les divisions qui sont en équilibre, sont aussi parallèles à l'horison ; les lignes de direction de ces poids doivent être perpendiculaires aux lignes AB, DE & HG ; (§. 41.) & leurs distances du centre du mouvement étant partagées également par les demi-lignes AC & CB, DF & FE, GI & IH seront égales. Or les gravités des parties qui pèsent également, étant en même raison que les distances considérées relativement l'une à l'autre, supposé par exemple IG de trois livres & IH avec les divisions placées dessus de 9 livres, IH n'aura qu'un degré de distance, tandis que IG en aura trois : Il est donc clair que cette expérience confirme le Théorème précédent. *Ce que nous avons à démon-*
trer.

D E F I N I T I O N XXII.

49. *La balance* est un instrument, par le moyen duquel on peut rechercher & découvrir la pesanteur des corps.

Problème IV.

Pl. II.
Fig. 14.

50. Construire une balance juste & exacte.

Solution.

1°. Divisez le *fleau* AB en deux parties au point C, pour en faire deux bras AC & CB. Placez à l'extrémité de ces bras deux bassins de même pesanteur DE.

2°. Placez perpendiculairement au point C l'éguille CK, de façon que le fleau AB puisse se mouvoir facilement dans la chasle. Si après avoir sus-

pendu la balance, l'éguille ne sort point de la chafse HI, il est manifeste que les corps placés dans les bassins sont d'une égale pésanteur.

Démonstration.

Si l'on suspend une balance au point I, l'anse HI fera perpendiculaire à la ligne horisontale; (§. 41.) par conséquent, lorsque l'aiguille CK est cachée dans l'anse, comme elle est perpendiculaire au fleau AB, celui-ci sera parallèle à l'horison. Mais comme les lignes de direction des poids D & E, font des Angles droits avec les bras AC, & CB, leur distances sont égales à ces bras. (§. 24.) Or AC & CB étant égaux, les poids suspendus de part & d'autre aux points D & E doivent aussi être égaux. (§. 46.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

§ 1. C'est pourquoi, si les bras AC & CB ne sont pas aussi longs l'un que l'autre, la balance est trompeuse.

Problème V.

§ 2. Eprouver si une balance est juste ou non.

Solution.

Mettez le Bassin D à la place du bassin E, & E Pl. II. en D, ou changez les poids des bassins: si vous Fig. 14. trouvez encore l'équilibre, la balance est juste; s'il n'y a plus d'équilibre, la balance est trompeuse.

Démonstration.

Si la balance est trompeuse, les bras ne sont point
T ij

également longs, (§. 51;) & par conséquent le bassin suspendu à celui qui a plus de longueur, doit être plus léger que l'autre; (§. 45.) c'est pourquoi si vous changez les bassins de bras & que vous mettiez le plus léger au bras le plus court, il n'y aura plus d'équilibre. *Ce que j'avois à démontrer.*

DEFINITION XXIII.

Pl. II. '
Fig. 15.

53. *La Romaine* ou *le peson* est une balance, avec laquelle, par le moyen d'un poids, on trouve la pesanteur de différens corps.

Problème VI.

54. Construire une balance romaine.

Solution.

1°. Divisez la verge MN en autant de parties égales que vous voudrez.

2°. Mettez à l'extrémité de la première division O, une languette ou lame de fer OP perpendiculaire à la verge, comme dans la balance ordinaire.

3°. Chargez le bras le plus court OM, jusqu'à ce qu'il soit en équilibre avec le plus long ON.

4°. Suspendez au bras qui a le plus de longueur le poids R, qui puisse glisser le long de la verge, comme vous voudrez; cela fait vous aurez la romaine.

Démonstration.

Parce que les deux bras MO, & NO, sont en équilibre, c'est comme s'ils n'avoient aucune gravité; par conséquent le poids R placé au point 1, fera en équilibre avec une livre; placé sur 2, il en contrebalancera deux; au point 3, il en contrebalancera 3, & ainsi des autres. Par conséquent, on

peut par le moyen d'un seul poids peser les corps de différente gravité: l'Instrument MNO est donc une balance romaine. (§. 53.) *Ce que j'avois à démontrer.*

Remarque.

55. Pour agir avec plus de sûreté, il faut déterminer par expérience dans le bras le plus long les points 1. 2. 3. 4. &c. on peut alors se passer de mettre en équilibre les deux bras, surtout quand il s'agit de peser des masses considérables, comme un chariot chargé de foin; car plus le bras le plus long surpasse le petit en pesanteur, moins il en faudra dans le poids que l'on fait glisser sur la verge pour peser les plus grandes masses.

Problème VII.

56. Connoissant la gravité du levier AB, la distance du centre de gravité V, les distances du poids AC, & de la puissance CB avec le poids O, trouver la grandeur d'une puissance morte. Pl. I.
Fig. 1.

Solution.

1°. Imaginons un levier sans pesanteur, au lieu duquel on aura placé au centre de gravité V le poids G, qui lui fera égal: (§. 35.) nous trouverons qu'il faudra placer le poids au point A, pour que le levier soit en équilibre. (§. 45.)

2°. Retranchons le poids trouvé du poids donné, le reste sera le poids que la puissance placée en B devra soutenir.

3°. Mais parce que ce poids est avec la puissance morte, qui doit être placé au point B, en même raison que BC & CA; (§. 45.) nous trou-

verons cette puissance par la règle de trois. (§ 85. Arith.)

E X E M P L E.

Supposons $CA = 1$, $CV = 2^1$, $CB = 5$,
 $G = 10$ liv. $O = 300$ liv.

$\begin{array}{r} 1 - 2 - 10 \\ \hline 10 \\ \hline 20 \text{ liv.} \\ 300 \text{ le poids} \\ \hline 280 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5 - 1 - 280 \\ \hline 5) 25 \text{ (56 liv. La puissance} \\ \hline 30 \\ 30 \\ \hline 0 \end{array}$
--	---

Problème VIII.

Pl. I.
Fig. 1.

57. Connoissant la pesanteur du levier AB, la distance du centre de gravité CV, les distances de la puissance BC, & du poids CA avec la force morte, trouver le poids.

Solution.

1°. Cherchez comme dans le problème précédent la partie du poids que le levier seul peut soutenir.

2°. Cherchez de même l'autre partie du poids, que la puissance appliquée au point B peut aussi soutenir.

3°. Réunissez ces parties trouvées, & vous aurez le poids que vous cherchiez.

E X E M P L E.

Supposons $CA = 1$, $CV = 2$, $CB = 5$,
 $G = 10$ liv. la puissance morte 36 liv.

1 — 2 — 10

10

20 La premiere partie du poids ,
 1 — 5 — 56

5

280 l'autre partie pu poids.
 20 la premiere.

300 le poids entier.

Problème IX.

58. Connoissant la gravité du levier G , le poids P , la puissance morte, la longueur & le centre de gravité V du levier AB , trouver le centre commun de gravité C , c'est-à-dire, le point d'appui où il faut poser le levier, pour que la puissance soutienne le poids.

Pl. I.
Fig. 1.

Solution.

1°. Cherchez d'abord le centre commun de gravité Z , celui de la puissance morte appliquée au point B , & celui de la gravité du levier G , en disant, VB est à ZB ou à la distance du centre commun de gravité, comme la somme de la puissance morte & de la gravité du levier, est à la gravité du levier. (§. 45.)

2°. Retranchez ZB de AB , & vous aurez AZ ;

3°. Imaginez le poids suspendu au point Z égal à la gravité du levier G , & à la puissance morte en

T jv

B pris ensemble; (§. 35.) vous trouverez comme auparavant la ligne CZ, & par conséquent le point C que vous cherchiez.

E X E M P L E.

Supposez la puissance placée en B = 66, la gravité du levier G = 10, le poids O = 300 livres, AB = 6, VB = 3.

$$66 - 10 - 3$$

$$\frac{3}{30}$$

$$30 \left(\frac{30}{66} = \frac{5}{11} = ZB. \right)$$

$$\frac{66}{11} = AB.$$

$$\frac{61}{11} = AZ.$$

$$366 - 66 - 61$$

c'est- 61 - 11 - 61 (§. 59. 96 Arithm.)

à-dire,

$$\frac{11}{11}$$

$$\frac{61}{61} (1 = AC.$$

Théorème VI.

Pl. II.

Fig. 16.

59. Si le poids est placé au point B, entre le centre du mouvement C, & le lieu de la puissance morte A, celle-ci fera en même raison avec le poids qui est au point B, que la distance du poids CB avec la distance de la puissance CA.

Démonstration.

Prolongez CA vers D, jusqu'à ce que $DC = CA$; il est évident qu'alors, la puissance qui est en A, a autant de valeur que la puissance qui est en D. (§. 46.) Or si la puissance qui est en D soutient le poids qui est en B, elle est avec lui en même raison que BC avec CD, ou CA; (§. 45.) par conséquent il est nécessaire que la puissance qui est en A, soit en même raison avec le poids B, comme BC l'est avec CA. *Ce que j'avois à démontrer.*

Remarque.

60. Nous nommerons dans la suite ce levier *homodrome* & le premier *hétérodrome*.

Problème X.

61. Connoissant la gravité E, & le centre de gravité F du levier homodrome CA, le poids G, la distance du poids CB, & de la puissance morte CA, trouver la quantité de la force morte au point A. Pl. II.
Fig. 16.

Solution.

1°. Cherchez la puissance qui doit être appliquée au point A, pour soutenir seulement le levier. (§. 59.)

2°. Cherchez aussi la puissance, qui appliquée au même point A, puisse seulement soutenir le poids donné G. (§. 59.)

3°. Réduisez ces deux puissances trouvées en une somme; en les ajoutant l'une à l'autre, vous aurez la force que vous cherchiez.

E X E M P L E.

Soit $CB = 1$, $CF = 3$, $CA = 6$, $G = 300$ l.
 $= 10$ liv.

6—3—10
 ou 2 1 10 (§. 95. 96. Arithm.)

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 \hline
 10 \text{ (5 l. la premiere partie de la puiff.} \\
 2 \\
 6 - 1 - 300 \\
 1 \\
 \hline
 300 \text{ (50 l. l'autre partie de la puiff.} \\
 66 \text{ 5 liv. la premiere.} \\
 \hline
 55 \text{ liv. la puissance entiere.}
 \end{array}$$

Remarque.

62. Pour comprendre tout l'ouvrage que Borelli a fait sur le mouvement des animaux, il suffit de se rendre familiers les problèmes que nous avons donné touchant le levier, & de se souvenir de ce que nous avons dit au paragraphe 10. Je ne parlerai point ici d'une infinité de cas, dans lesquels il faut faire usage de ces sortes de calculs. Il n'y a presque aucun instrument dans les arts, ni aucun mouvement des corps dans la nature, où ils ne puissent être appliqués.

Théorème VII.

Pl. II. 63. Si la puissance fait baisser le levier de L en
 Fig. 17, & M, l'espace que la puissance parcourt, sera à l'é-
 13. gard de l'espace que le poids parcourra, comme le poids est à l'égard de la force morte.

Démonstration.

Car pendant que la puissance forme l'arc LM dans son mouvement, le poids en s'élevant forme celui de HN: l'espace que parcourt le poids est donc à celui que la puissance parcourt, ce que l'arc HN est à l'arc LM, c'est - à - dire, comme HI à IL, à cause de l'égalité des angles au point I; (§. 40. Géom.) & par conséquent, comme la force morte est au poids. (§. 45.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

64. Si vous abaissez la perpendiculaire NO du point N sur HI, & du point M, celle qui est marquée MR sur IL, NI sera à l'égard de NO, comme MI à l'égard de MR; (§. 10. Trigon.) par conséquent $NI : MI = NO : MR$. (§. 83. Arith.) L'espace que le poids parcourt en montant est donc à celui que la puissance parcourt en descendant ce que la puissance morte est au poids.

Corollaire II.

65. Il s'ensuit de là qu'il faut autant de force pour lever un poids de trois livres à la hauteur d'un pied, qu'il en faut pour lever une livre à la hauteur de trois pieds, dans le même espace de tems.

Corollaire III.

66. Comme l'on mesure la vitesse du mouvement d'un corps par l'espace qu'il a parcouru dans un tems déterminé, ainti la vitesse, avec laquelle une puissance se meut sera en même raison avec la

vitesse du mouvement d'un poids, qu'est un poids avec la force morte.

Remarque.

67. Ainsi nous voyons que le levier n'augmente point la force, mais qu'il la met en situation de produire un mouvement plus lent. Si l'on veut donc accélérer ce mouvement, il faut placer la puissance au point H, & le poids au point L: alors la force est plus grande que le poids, & le mouvement se fera dans un moindre espace de tems.

Théorème VIII.

Pl. I.
Fig. 2.

68. Si la ligne de direction de la puissance morte fait un angle droit avec le rayon de la roue AC, & que la ligne de direction du poids E fasse le même angle avec le rayon du cylindre CB, la puissance morte est au poids comme le rayon du cylindre CB avec le rayon de la roue AC.

Démonstration.

La puissance soutiendrait le poids quand il n'y auroit que la ligne AB: ainsi comme le centre du mouvement est au point C, le poids au point B, & la puissance morte appliquée à angle droit au point A, celle-ci fera à l'égard du poids, comme GB à l'égard de CA. (§. 10. 45.) Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire I.

69. Si la ligne de direction de la puissance morte FH fait un angle oblique avec le rayon de la roue FC, c'est comme si elle étoit placée au point G: elle sera donc à l'égard du poids comme CB à l'égard de CG.

Corollaire II.

70. Si l'on connoît l'angle GFC, que la puissance forme avec le rayon de la roue aussi connu ; on trouvera par la Trigonométrie la ligne GC. (§. 20. Trigon.)

Corollaire III.

71. La puissance fait un très-grand effet quand la ligne de direction fait un angle droit avec le rayon de la roue. (§. 25. 45.)

Corollaire IV.

72. Tous les problèmes qui sont proposés sur le levier peuvent être appliqués aux roues, parce que la roue peut être considérée comme un levier à raison de la puissance morte. (§. 10.)

Problème XI.

73. Connoissant le poids C, & les rayons des aissieux BH, AD, EF, & des roues BA, DE, FG. Trouver la force morte qui doit être placée au point G. Pl. II.
Fig. 19.

Solution.

1°. Cherchez la puissance qui doit être appliquée à la circonférence de la première roue pour pouvoir soutenir le poids C suspendu au cylindre BH. (§. 68.)

2°. Regardez cette puissance comme un poids suspendu au cylindre de la seconde roue. Déterminez encore la puissance, qui étant appliquée à la circonférence de cette roue, puisse soutenir & la roue & le poids. (§. 68.)

3°. Continuez cette opération jusqu'à ce que vous ayez trouvé la puissance qui doit être appliquée à la dernière circonférence.

E X E M P L E.

Soit $C = 6000$ liv. $BH = 6$, $AB = 34$,
 $AD = 5$, $DE = 35$, $EF = 4$, $FG = 27$.

34—6—6000	1	
ou 17 3 3	17	
<u>18000</u>	~~1888~~	{
	~~28888~~	
	~~17777~~	
	111	
35—5—1059	32	{
7 1	~~2888~~	
	~~777~~	
	1	
27—4—151 ²	2	{
4 7	261	
<u>4</u>	688	
605—1	~~277~~	
7	2	

1058¹⁴ ou
 17
 1059 puissance à
 appliquer en A.

151² puissance
 7 en E.

22¹¹ puissance
 27 en G.

Remarque.

74. Si connoissant la puissance vous cherchez le poids, vous n'avez d'autre opération à faire, que de commencer par la puissance, qui est au point C, & de prendre pour une puissance appliquée au point E, le poids qui est placé à ce même point, & continuer l'opération comme auparavant.

Théorème IX.

75. Si la puissance met un poids en mouvement par le moyen de l'aissieu dans la roue, l'espace de la puissance est en même raison avec l'espace que le poids parcourt, comme le poids avec la puissance morte. Pl. I.
Fig. 2.

Démonstration.

Pendant que la roue tourne une fois, le cylindre IBK fait aussi un tour; (§. 12.) & ainsi le poids E est élevé à la hauteur d'autant de pieds que la circonférence de la roue en contient: donc la circonférence du cylindre représente l'espace que le poids parcourt, comme la circonférence de la roue celui que la puissance parcourt. Ces deux espaces sont donc l'un à l'égard de l'autre, comme la circonférence du cylindre à l'égard de la circonférence de la roue; ou ce qui revient au même, comme le rayon du cylindre CB à l'égard du rayon de la roue CA; & par conséquent comme la puissance morte, à l'égard du poids. (§. 68.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

76. Il faut observer que lorsque plusieurs roues s'engrangent l'une dans l'autre, si elles sont attachées au même cylindre, elles font autant de tours les unes que les autres dans le même espace de tems. Si elles ne sont point attachées au même cylindre, & qu'une petite reçoive son mouvement d'une grande, pendant que celle-ci fait un tour, celle-là en doit faire autant que la grande contient de fois la circonférence de la petite, ou ce qui revient au mê-

me autant que le nombre des dents de la grande doublera le nombre des dents de la petite.

Probleme XII.

Pl. II.
Fig. 19.

77. Connoissant en quelle raison font les rayons, ou les circonférences des petites roues, avec les rayons & les circonférences des grandes, trouver les tours que fait une roue qui tourne avec grande vitesse, tandis qu'une grande, dont le mouvement est lent ne tourne qu'une fois.

Solution.

1°. Divisez les circonférences des grandes roues par les circonférences des petites.

2°. Multipliez les quotiens les uns par les autres, le produit indiquera le nombre des tours que fait la roue G qui tourne avec vitesse, dans l'espace de tems que la roue A n'en fera qu'un, en tournant lentement. (§. 76.)

E X E M P L E.

Soit la circonférence de la roue A 24, de la moindre D 12, de l'autre plus grande E 36, & de l'autre petite F 9.

$$\begin{array}{rcl} 24 & \} & 36 \\ 12 & \} & 9 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 4 \\ \hline 8 \end{array}$$

La dernière roue G fera donc 8 tours, pendant que la roue A n'en fera qu'un.

Remarque.

78. On estime aussi les circonférences par le nombre

nombre des dents, parce que dans les roues qui se rencontrent les dents sont aussi grandes les unes que les autres.

Problème XIII.

79. Connoissant le nombre des révolutions de la roue qui tourne avec vitesse, tandis que celle qui ne tourne que lentement ne fait qu'un seul tour, trouver le nombre des roues & le nombre de dents que contiennent ces roues & ces pignons, ou le nombre des fuseaux qui forment ces lanternes.

Solution.

1. Réduisez en ses produifans le nombre donné des révolutions, autant il y aura de produifans, autant il faudra de roues dentées & de pignons ou lanternes.

2. Multipliez féparément par chaque produifant trouvé un nombre de dents que vous aurez déterminé dans les pignons, les produits vous donneront le nombre des dents, des roues qui s'engraineront avec les pignons. (§. 77. 78.)

E X E M P L E.

Une roue qui tourne avec vitesse fait 40 révolutions, tandis que celle qui tourne lentement n'en fait qu'une. Comme 40 est le produit de 5 par 8, on conçoit qu'il faut deux roues dentées, & autant de pignons ou lanternes, qui s'engraineront dans ces roues. Si les lanternes ont six fuseaux, la roue A qui tourne lentement aura 48 dents, celle du milieu E en aura 30, & la troisieme G, à laquelle la puissance est appliquée n'en aura point, parce qu'elle ne doit recevoir sa figure

que de la maniere dont on jugera à propos d'appliquer la puissance.

Problème XIV.

80. Connoissant la puissance & le poids, trouver le nombre des roues, & les raisons de leurs rayons aux rayons des axes, ou petites roues attachées au même cylindre que les grandes.

Solution.

1. Divisez le poids par la force, afin de connoître combien de fois celle-ci est renfermée dans celui-là.

2. Séparez le quotient des produisans, car le nombre des produisans est précisément le nombre des roues; & les diamètres des pignons, tambours ou lanternes font en même raison avec les diamètres des roues appliquées au même cylindre, que l'unité avec chaque produit. (§. 73.)

E X E M P L E.

Supposons le poids de 30000 livres & la puissance de soixante livres, le quotient réduit aux produisans 4. 5. 5. 5. sera de 500 livres.

On peut donc faire quatre roues, dans l'une desquelles le diamètre de l'axe soit en même raison avec le diamètre de la roue, que 1 avec 4, & dans les autres comme 1 est à 5.

Remarque.

81. La réduction des nombres en leurs produisans dépend de l'expérience, & il faut un peu d'exercice pour y réussir. On y procède plus faci-

lement, en divisant le nombre qui doit être réduit par des petits nombres; quelquefois le nombre donné ne peut se réduire en nombre purement entiers: dans ce cas il faudra retenir la fraction avec ces nombres entiers, ou si la chose est praticable il faut un peu augmenter le nombre jusqu'à ce qu'il puisse être exactement divisé.

Théorème X.

82. Si la puissance K, dont la direction DK est Pl. I.
Fig. 7. parallèle à la longueur du plan AG, soutient le corps D sur le plan incliné AC: la puissance K est en même raison avec le corps D, que la hauteur du plan AB avec la longueur AC.

Démonstration.

Soit DH la ligne de direction du poids D, nous pouvons concevoir toute la pesanteur comme réunie dans le seul point F, (§. 23. 35.) par conséquent EF est la distance du poids à l'égard du centre du mouvement, & ED la distance de la puissance; (§. 24.) mais comme DEF représente un levier (§. 10.) dont le centre du mouvement est au point E; la puissance K qui est au point D, est à l'égard du point D qui est au point F, comme EF à l'égard de ED: (§. 45.) & parce que les angles DEG & EFG sont droits, & que l'angle EGF est commun aux deux triangles EFG, & DEG, l'angle EDF sera donc égal à l'angle FEG, & l'angle DEF à l'angle EGF (§. 78. Géom.) donc $EF : ED = GF : EG$; (§. 148. Géom.) & comme les angles verticaux au point G sont égaux. (§. 40. Géom.) & les angles formés aux points F & H sont droits, $GF : EG$ sera égal à $GH : GC$ (§. 148.

Géom.) Enfin comme $GH : GC = AB : AC$.
 (§. 149. Géom.) & par conséquent $EF : ED =$
 $AB : AC$. (§. 57. Arithm.) AB est à l'égard de
 AC , comme la puissance morte à l'égard du poids.
Ce que j'avois à démontrer.

Théorème XI.

Fig. 10. 83. Si le poids R placé sur le plan incliné LN est soutenu par la puissance dont la direction RI est parallèle à la base MN : la puissance est à l'égard du poids, comme la hauteur LM à l'égard de la base MN .

Démonstration.

On voit par la démonstration du Théorème précédent, (§. 82.) que l'on peut regarder le cas présent comme si dans un levier TQS la puissance étoit placée au point T , & le poids au point S ; par conséquent la puissance est à l'égard du poids, comme QS à l'égard de TQ , ou de RS ; (§. 45.) & comme par la démonstration dont nous venons de parler on a prouvé que les triangles RQS , SQO , OPN & LMN sont semblables, on aura $QS : SR = SO : QS = OP : PN = LM : MN$; (148. 149. Géom.) & par conséquent la puissance est en même raison avec le poids, que LM avec MN . *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

84. Il s'en suit de-là que dans la vis la puissance morte est au poids ou à la résistance, qu'elle doit vaincre, (§. 3.) comme la distance des filets est à la superficie de la vis. Car la vis n'est autre chose qu'un plan incliné entortillé autour d'un cylindre

(§. 20.) Or la puissance a la direction de son mouvement parallèle à la base.

Corollaire I I.

85. Par conséquent plus les filets ou arrêtes de la vis sont serrés, plus la vis a d'efficacité; la même grosseur du cylindre toutefois posée.

Corollaire I I I.

86. Si le poids commence son mouvement en Fig. 10. N & va jusqu'en O, il a été élevé à la hauteur OP, & la puissance fuit dans son mouvement la ligne PN; donc l'espace parcouru par la puissance, est à l'égard de l'espace que parcourt le poids, comme le poids à l'égard de la puissance morte. (§. 83)

Corollaire I V.

87. La même chose se trouve dans la vis; car tandis que la puissance est en mouvement autour de la vis, le poids baisse par la distance des filets: par conséquent, l'espace que le poids parcourt est en même raison avec l'espace que la puissance parcourt; que la distance de deux filets, avec la circonférence de la vis; c'est-à-dire, comme la puissance morte avec le poids. (§. 84.)

Problème X V.

88. Connoissant la puissance, la circonférence de la vis, & la distance des filets, déterminer la résistance que la puissance peut vaincre par le moyen de la vis.

Solution.

Cherchez un quatrième nombre proportionnel à
V iij

la distance des filets , à la circonférence de la vis ;
& à la puissance : (§. 85. Arithm.) & vous aurez ce que vous cherchez.

... E X E M P L E .

Soit la distance des filets 3", la circonférence de la vis de 25", la puissance de 30 livres..

$$3 - 25 - 30$$

$$1 \quad 10 \quad 10 \quad (\S . 59 . \text{ Arithm. })$$

Résistance 250 à vaincre.

Problème XVI.

89°. Connoissant la puissance & le poids , trouver le diamètre de la vis & la distance des filets.

Solution.

1°. Divisez le poids par la force ; 1 sera la distance des filets & le quotient sera la circonférence de la vis. (§. 84.)

2°. Multipliez par ce quotient que vous avez trouvé, la distance des filets que vous aurez prise par pouces ou par lignes, suivant les circonstances, & vous aurez la circonférence de la vis en pouces ou en lignes. (§. 85. Arithm.)

3°. Par - là vous trouverez son diamètre. (§. 133. Géom.)

E X E M P L E.

Soit le poids de 250 livres, la force de 30

r

288 (8 $\frac{1}{3}$)

30 | La distance des filets 3^m.

25 La circonférence de la vis

314—100—25

100

30

2500

342

288 (7 $\frac{302}{314}$ ou 7 $\frac{151}{157}$ le diamètre de la vis.

314

314

157

280

Corollaire.

Fig. 21.

90. Transportez sur la ligne BC la circonférence trouvée de la vis 25^m; élevez une perpendiculaire AB sur B, (§. 70. Géom.) achevez le rectangle ABCD, (§. 59. Géom.) transportez sur cette perpendiculaire les distances des filets, depuis B jusques en A, & depuis C jusques en D, autant de fois qu'il doit y avoir de filets, & tirez les filets B1, 1. 2, 2. 3, 3. 4, &c. le plan ainsi marqué, appliqué autour d'un cylindre, dont la circonférence est égale à BC, marquera les filets qu'on doit former sur le cylindre.

Remarque.

91. On tourne souvent la vis par le moyen d'une manivelle, qui avec le cylindre forme une machine du même genre que la roue avec son aissieu; (§. 13. & qui par conséquent augmente la force de la vis. (§. 68.)

Vjw

DEFINITION XXIV.

Fig. 21.

92. On appelle vis sans fin celle qui fait tourner une roue à dents.

Corollaire I.

93. Les dents de la roue étoilée doivent s'engrainer dans les filets obliques de la vis.

Remarque.

94. La vis infinie n'a besoin que de trois filets

Corollaire II.

95. Tandis que la vis fait un tour, la roue n'avance que d'une dent, de-là vient que le mouvement de la roue est très lent.

Théorème XII.

Pl. I.
Fig. 6.

96. Si la force D par le moyen d'une corde qui entoure une poulie, soutient le poids E, la force fera égale en poids.

Démonstration.

La force D est à l'égard du poids E, comme AC à l'égard de BC; (§. 18. 45.) Or $AC = BC$; (§. 18.) donc la force est égale au poids. (§. 53. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème XIII.

Pl. II.
Fig. 13.

97. Si la puissance E soutient le poids F par le moyen d'une corde qui entoure la poulie, de fa-

con que les deux cordes soient parallèles, & que la poulie soit élevée avec le poids pendant le mouvement ; la puissance sera à l'égard du poids comme 1 à l'égard de 2.

Démonstration.

Comme la corde est fixée au point D, & le point F suspendu au point H, la puissance est à l'égard du poids comme AH à l'égard de AB ; (§. 59.) or $AH = \frac{1}{2} AB$. (§. 18.) La puissance est donc la moitié du poids. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

98. Il s'ensuit donc que dans les *Polyssaste*, ce ne sont pas les poulies supérieures, mais les inférieures qui en augmentent l'effet.

Théorème XIV.

99. Si dans le polyssaste toutes les cordes MN, Fig. 24. SX, QR, PO, TV, sont parallèles, la puissance placée en Z, est à l'égard du poids W, comme 1 est au nombre des cordes que le poids tient tendues.

Démonstration.

Comme dans ce cas, le poids bande également chaque corde ; elles participent également à tout le poids : c'est pourquoi la puissance placée en Z, n'a rien à soutenir que la partie du poids que soutient la corde MN, (§. 96.) par conséquent la puissance est au poids, comme 1 est au nombre des cordes que le poids tient tendues. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire. I.

100. Si le poids pèse 500 livres, & qu'on le divise par le nombre des cordes 5, il en résultera que la puissance est 100.

Corollaire II.

101. Si l'on multiplie la puissance 100 par le nombre des cordes 5, vous trouverez que le poids pèse 500.

Corollaire III.

102. Si vous divisez par la puissance 100 le poids 500, vous trouverez le nombre des poulies; parce que le nombre, tant des supérieures que des inférieures prises ensemble, est le même que celui des cordes.

Remarque.

103. Quelquefois pour ne pas donner trop de hauteur au polyspaste, on ne place point les poulies l'une sur l'autre, mais à côté l'une de l'autre.

Théorème XV.

104. Si par le moyen du polyspaste la puissance met le poids en mouvement, l'espace de la puissance est à l'égard de celui que le poids parcourt, comme le poids à l'égard de la puissance morte.

Démonstration.

S'il faut élever le poids à la hauteur d'un pied, chaque corde qu'il bande doit pareillement se ra-

courcir d'un pied ; la puissance doit donc tirer la corde à elle en longueur d'autant de pieds que le polyspaste contient de cordes ; par conséquent l'espace qu'elle parcourt est à l'égard de celui que le poids parcourt , comme le nombre des cordes à l'égard de l'unité , c'est-à-dire , comme le poids à l'égard de la puissance morte. (§. 99.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème XVI.

105. Dans le coin la puissance est au poids ou à la résistance du corps qui doit être fendu , ce que la moitié de la grosseur ML est à la longueur MN. Fig. 10 .

Démonstration.

Le coin est composé de deux plans inclinés , & comme c'est la même chose que le poids soit tiré par le montant du plan , ou que celui-ci soit poussé en avant sous celui-là ; & que d'ailleurs la direction de la puissance qui divise les corps par le moyen du coin revient à la longueur du coin , la puissance est au poids comme la moitié de la grosseur ML à la longueur MN. (§. 83.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

106. Il s'ensuit de là que plus un coin est aigu , plus il a d'effet ; parce que le rapport de ML à MN seroit bien moindre dans un coin moins aigu , que dans celui qui le seroit davantage.

DEFINITION XXV.

107. La roue directe est celle sur laquelle l'eau tombe , & la fait tourner par sa pesanteur , en passant par dessus.

DEFINITION XXVI.

108. *La roue retrograde* est celle qui étant suspendue sur l'eau, en reçoit un mouvement rétrogressif que l'eau lui donne en coulant par dessous.

Corollaire I.

109. Comme il est rare, qu'excepté dans les grandes rivières l'eau ait assez de rapidité pour faire tourner les roues des moulins; il faut la faire tomber de haut pour lui donner la rapidité requise & propre à faire tourner des corps pesants; d'où l'on doit conclure qu'il faut nécessairement placer la roue dans un lieu beaucoup plus bas que celui d'où l'eau coule.

Corollaire II.

110. L'eau prend sa pente successivement de lieu à autre, il faut donc, pour qu'elle acquierre assez d'impétuosité, changer cette pente en précipice, & par conséquent examiner de quelle nature est cette pente, c'est-à-dire, de combien le lieu où la roue doit être placée, est plus près du centre de la terre que celui d'où l'eau coule.

DEFINITION XXVII.

111. *L'art du nivellement* est l'art de trouver de combien un lieu est plus près du centre de la terre qu'un autre.

Corollaire I.

112. Comme tous les points d'une ligne horizontale sont également éloignés du centre de la terre, (§.

28) il ne faut que tirer cette ligne horifontale d'un lieu à un autre, & mefurer la profondeur de celui-ci, au-deffous de la ligne horifontale de l'autre.

Corollaire I I.

113. Il s'enfuit de-là que pour trouver le niveau des eaux, il faut d'abord trouver la ligne horifontale.

Problème XVII.

114. Faire un *niveau*, c'est-à-dire, un instru- Fig. 154
ment par le moyen duquel on trouve la ligne horifontale.

Solution.

1. Tracez fur une planche bien polie le demicercle ACBD que vous diviferez en deux parties égales au point du centre C par une petite ligne DH.

2. Placez deux crochets aux points F & E.

3. Suspendez au centre une boule de plomb, par le moyen d'un fil de foye, ou autre. Si cet instrument est attaché à une corde, par les crochets FE, & que le fil de foye tombe fur la ligne DH, la corde tendue, & le diamètre de l'instrument AB feront une partie de la ligne horifontale *apparente*.

Demonstration.

La ligne de direction des corps graves est perpendiculaire à la ligne horifontale apparente. (§. 41.) Or le fil CD est la ligne de direction du plomb; (§. 23.) & se trouve perpendiculaire à la ligne AB, s'il touche la ligne DH: (§. 17. 37.

Géom.) donc AB est, dans ce cas, la partie de la ligne horisontale apparente. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

115. Riccioli (*Geogr. reform. Lib. 6. chap. 26. f. 229.*) a remarqué que cette sorte de niveau, à moins qu'il ne soit extrêmement grand, peut induire en erreur pour les lieux éloignés les uns des autres, parce qu'à peine marque-t-il la différence de 5 minutes & même d'un demi-dégré: s'il est aussi trop grand, on le transporte avec peine: dans ce cas, au lieu du demi-cercle, l'on joint un ais étroit EGHF au diamètre AB, de façon qu'il fasse un angle droit avec lui, & que le rayon CD puisse être prolongé jusqu'à G. On trouvera dans notre grand *Cours de Mathématiques*, les autres espèces de niveau qui sont composés de quarts de cercles armés de pinnules.

Pl III.
Fig. 16.

DEFINITION XXVIII.

116. *La pente des eaux* est une ligne droite qui indique de combien leur surface est plus éloignée du centre de la terre dans un endroit que dans un autre.

Problème XVIII.

117. Nivelier les eaux, ou déterminer leur pente par le moyen d'un niveau, fait avec des quarts de cercle armés de pinnules.

Solution.

1°. Prenez avec un poids attaché à une corde la hauteur que les endroits du rivage que vous

vouléz niveller ont au-dessus de la surface des Fig. 27.
eaux, & marquez ces hauteurs sur le papier.

2°. Placez le niveau sur le rivage A, & enfoncez sur l'autre B un bâton perpendiculairement à l'horison, auquel vous attacherez un châssis quarré teint en noir, mais marqué au milieu d'un cercle blanc, ou d'une croix blanche; qu'il soit attaché de façon qu'on puisse le fixer aux différents points de ce bâton par le moyen d'une vis.

3°. Baissez ou levez ce châssis jusqu'à ce que celui qui bornoye par les pinnules du quart de cercle apperçoive le centre de ce quarré.

4°. Cherchez depuis A jusqu'à D la hauteur de l'œil, & depuis B jusqu'à C celle du centre du châssis C.

5°. Ajoutez au premier la hauteur du rivage A, & au second celle du rivage B.

6. Comme par cette méthode on voit clairement de combien la ligne CD, parallèle à la ligne horizontale A s'écarte dans l'un & l'autre lieu de la superficie des eaux, il ne faut que soustraire la première somme trouvée de l'autre: le reste sera la pente des eaux que l'on cherchoit.

On doit concevoir ici le niveau qui a été placé en P, comme placé en A, au lieu du châssis D.

E X E M P L E.

La hauteur du rivage en A 64". La hauteur du rivage en B. 58'.

$$\begin{array}{r} AD \ 56 \\ \hline 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} BC \ 72 \\ \hline 130 \\ \hline 120 \end{array}$$

La pente 10

7. Si d'un lieu choisi on ne peut appercevoir l'autre, on procédera par parties en divisant la distance donnée en parties que l'on nivellera séparément; mais comme on peut rencontrer dans cet espace des endroits plus élevés que celui où l'on veut commencer à niveller, on placera le niveau EF entre deux bâtons AQ & BH, & l'on marquera séparément à gauche les hauteurs du centre du chassis D., & à droite celles du centre du chassis C.

Formez une somme des premières hauteurs; additionnez aussi les secondes, & faites la soustraction des unes par les autres; le reste marquera la pente des eaux. La hauteur marquée à gauche AD 34^{li}. La hauteur à droite BC 57^{li}.

BO 68		MP 102	
La hauteur du rivage	La hauteur du rivage		
en A	64	en M	58
	166		217
			166

La pente — 51

On fait cette opération avec le niveau, tel que nous l'avons décrit, (§. 114.) en tendant des cordes par le moyen des piquets; & dans ce cas on n'a pas besoin de chassis quarrés.

Problème XIX.

Pl. III.
Fig. 28

118. Mouvoir une machine par la force du vent.

Solution.

1. Faites quatre volans ou aîles avec des treillis comme la figure les représente: la longueur EA soit d'environ 30 pieds, & la largeur HI de 6. Attachez-les à angles de 45 degrés, à un cylindre FL;

FL, car si on les ajustoit à angles droits, le vent ne les feroit point tourner. Les mieux adaptés sont ceux qui coupent l'axe à l'angle de 54 degrés, parce qu'alors le vent a beaucoup de force pour les faire tourner.

2°. Comme il faut que les volans regardent le vent, toute la machine doit tourner autour de l'axe K, afin que par le moyen du levier PQ attaché à la tourrette, on puisse tourner la machine du côté qu'on voudra.

Autre façon de Moulin à vent.

1°. Elevez une tour en pierres jusqu'au toit, qui ne doit pas être fixé de façon qu'il ne puisse tourner. Fig. 191

2°. Faites passer par le toit un cylindre, auquel soient attachés quatre volans, tels que nous les avons dépeints ci-dessus.

3°. Attachez fixément à ce toit une poutre qui sorte en dehors jusqu'à B. Ajoutez - en une autre AB au bout de la première, de façon qu'elle descende directement jusqu'à la plate - forme bâtie autour du moulin.

4°. Joignez encore celle dont nous venons de parler, à une autre AC, qui doit être aussi fermement attachée au toit au-dessus de C.

5°. Plantez des crochets de fer d'espaces en espaces sur la plate-forme; puis ayant ajusté un cable au bout de ces solives A, vous le ferez passer par un de ces crochets, & par le moyen d'un cabestan mobile vous ferez tourner le toit.

Remarque.

119. On se sert des moulins de la première
Tome I. X

forte en Allemagne & en diverses Provinces de France ; les Hollandois employent communément la seconde qui est aussi beaucoup en usage dans la Xaintonge & le Poitou. Pour pouvoir faire tourner commodément le toit de ces derniers , on fixe un anneau de fer cannelé tout autour du haut de la tourrette , au fond duquel on insère , d'espaces en espaces des poulies de laiton , dont une partie de la circonférence doit sortir un peu de la cannelure , sur laquelle on ajuste enfin un autre cercle de fer , comme le premier , & sur ce second on élève le toit.

Problème XX.

120. Faire une machine qu'un cheval ou autre animal puisse faire tourner.

Solution.

1°. Elevez verticalement un cylindre , auquel vous joindrez un timon de 7 , 8 pouces , ou davantage selon l'exigence des cas , pour qu'un cheval puisse y être attaché.

2°. Placez horifontalement au-dessus de ce cylindre , une roue étoilée un peu grande , que vous attacherez à ce cylindre par de grosses solives égales en nombre & en longueur aux rayons de la roue , larges de moitié , mais épaisses du double de ces rayons. Supposons , par exemple , la longueur des rayons de 7 pieds , leur grosseur de 2 , leur largeur de 7 pouces , & leur nombre de 16 ; la roue doit être attachée avec 16 solives dont la longueur sera de 7 pieds , la grosseur de $8\frac{1}{2}$, & la largeur de 4 pouces.

Problème XXI.

121. Faire une machine qu'un animal puisse faire mouvoir avec les pieds.

Solution.

1°. Faites une grande roue garnie de traverses, telles que les ont les *roues directes*.

2°. Enfermez l'animal dans une étable bâtie au-dessus, & dont le plancher doit être percé, afin que l'animal appuie ses pieds de derriere sur les traverses.

3°. L'animal appuyant ses pieds sur une traverse, la pousse en arriere, & se trouve obligé de mettre les pieds sur la traverse suivante; ainsi la roue est toujours en mouvement.

Remarque.

122. S'il ne s'agit que de faire tourner une broche, ou tel autre poids peu pesant, au lieu de traverses, la roue doit être garnie en devant avec des ais minces: on y enferme un chien dressé pour cela qui la fera tourner. C'est un tambour de tourne-broche.

Problème XXII.

123. Faire une machine qu'un homme puisse mettre en mouvement en l'abaissant.

Solution.

Attachez à un cylindre placé horizontalement plusieurs bras qui passent par le centre de l'axe: si Fig. 30. vous les baissez successivement avec la main, le cylindre tournera sur son axe.

X ij

Problème XXIII.

124. Mouvoir une machine en la tournant.

Solution.

- Fig. 31. Adaptez à un cylindre une manivelle ou un rectangle ABCD, tel que celui qui est dépeint à la figure 31, ou courbé en arc de cercle EFG, comme à la figure 32 : par le moyen de ces manivelles vous tournerez le cylindre.
- Fig 32.

Problème XXIV.

125. Mouvoir une machine en tirant.

Solution.

- Pl. I. On le fait par le moyen d'un *treuil* ou *cabestan*
- Fig. 3. FGIH.

Problème XXV.

126. Mouvoir une machine en la foulant avec les pieds.

Solution.

Faites une grande roue, de la même forme que celle dont nous avons parlé dans la remarque sur le Problème 21, (§. 122.) & dans laquelle deux hommes puissent se tenir debout.

Autre Machine.

- Pl. III. Placez horifontalement le levier HF, dont le
- Fig. 33. centre du mouvement F puisse se mouvoir autour d'un clou de fer.

Suspendez ce levier à un cylindre, qui doit traverser le centre de la roue L, par le moyen d'une

verge ou corde EH attachées à la manivelle BL.

Si vous posez le pied au point G, le levier baissera, il s'élèvera au contraire lorsque vous leverez le pied; & ainsi le cylindre tournera.

Corollaire.

127. Comme dans le dernier cas, le poids que nous devons supposer placé au point H est plus éloigné du centre du mouvement que le pied posé au point G, la force doit être plus grande que le poids qui doit être mis en mouvement; (§. 59.) aussi ne se fert-on de cette façon de mettre en mouvement, qu'à l'égard des poids qui ne sont point considérables. On peut cependant avec moins de force mouvoir le levier, en appliquant la verge ou corde en G, & la main en H.

Problème XXVI.

128. Faire une machine qui puisse se mouvoir par le moyen d'un poids qui descend.

Solution.

1. Entortillez une corde à un cylindre LM placé horizontalement. Pl. III.
Fig. 35.

2. Faites la passer au tour de la poulie G attachée au plancher, ou à un autre endroit élevé.

3. Attachez enfin un poids P à son extrémité; le poids que sa pesanteur fait descendre, développe la corde, & fait tourner le cylindre.

Corollaire I.

129. Plus l'endroit, d'où le poids descend, est élevé, plus la corde se développe lentement, &
X iij

plus le mouvement dure, (car dans ce cas elle est plus longue.)

Corollaire I I.

130. Veut-on faire durer le mouvement plus long-tems; qu'on fasse passer la corde par un poly-passe FG, auquel on suspendra le poids P. Supposons, par exemple, qu'elle passe par quatre poulies, le cylindre doit céder quatre pieds de corde avant que le poids ait descendu un pied de hauteur.

Problème XXVII.

131. Aider la force mouvante à lever un poids.

Solution.

Supposons, par exemple, que le poids qu'on veut lever est de 100 livres.

Fig. 36.

1°. Attachez à ce poids E une corde que vous ferez passer par une poulie HF.

2°. Attachez à l'autre bout de cette corde le poids D, presque égal en pesanteur à celui que vous devez lever.

3°. Si vous tirez la corde du côté du poids HD, il faudra peu de force pour lever l'autre poids E.

Problème XXVIII.

132. Mettre en mouvement une machine élastique.

Fig. 37.

Solution.

1°. Faites faire une lame d'acier que vous rouleriez. Voilà le corps élastique AB.

2°. Vous l'enfermerez dans une petite boîte

cylindrique, & vous attacherez au premier bout une chaîne ou une corde à boyaux.

3°. Comme l'élasticité est plus forte au commencement de la tension, & qu'elle tire avec moins de force sur sa fin. La fusée GLHI à laquelle est attachée la chaîne ou la corde, ne doit pas avoir la forme de cylindre, mais de cône : Car quoique la puissance tire avec plus de force au commencement, & plus lentement sur la fin ; elle est cependant d'abord plus proche du centre du mouvement que sur la fin, & par conséquent dans le premier cas elle a moins d'efficace, & dans l'autre elle en a davantage. (133.)

Remarque.

133. On a trouvé par expérience, de combien la fusée GH doit augmenter en grosseur, depuis G, jusques en H ; car on a jugé par la vue, & par l'ouïe, si une montre, qui reçoit tout son mouvement de l'élasticité, avoit ce mouvement uniforme, ou non. Et c'est avec raison que Schot (Techn. Curieuse, liv. 9. ch. 4. prop. 10 pag. 641.) veut que l'on examine aux oscillations d'un balancier, si les circonvolutions d'une roue qui se meut lentement, sont d'une aussi longue durée les unes que les autres.

Problème XXIX.

134. Modérer le mouvement des machines, de
manière qu'il soit toujours uniforme.

Pl. III.

Fig. 34.

Solution.

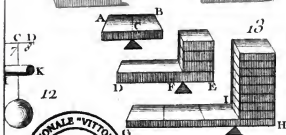
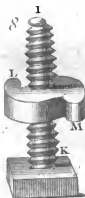
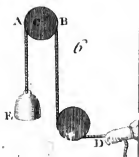
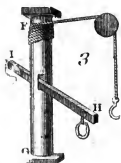
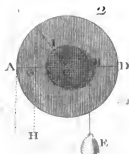
Il faut se servir pour cela de roues posées en
Xjv

équilibre MN, dont la circonférence est, ou garnie de plomb, ou qui ont quatre poids égaux posés à distance égale : c'est pour cette raison qu'on met des balanciers aux Automates.

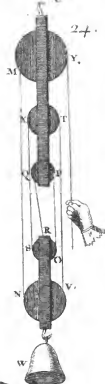
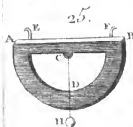
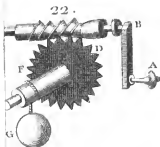
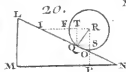
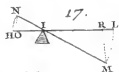
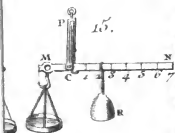
Corollaire.

135. Ces roues à contre-poids, sont nécessaires dans les machines que les hommes ou les animaux mettent en mouvement pour rendre ce mouvement égal.

Fin de la Mécanique.

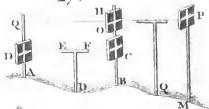








27.



28.



29.



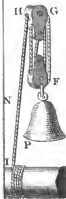
31.



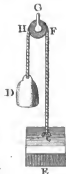
32.



35.



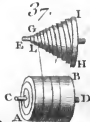
36.

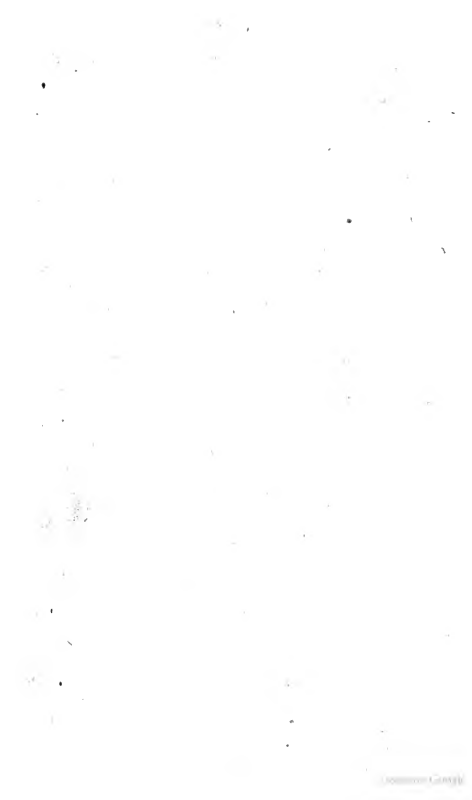


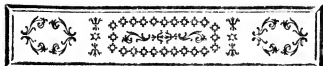
33.



37.







E L E M E N S

D'HYDROSTATIQUE.

D E F I N I T I O N I.

1. **L'**HYDROSTATIQUE est la Science de l'action des fluides sur les corps, & du rapport des pésanteurs de différens fluides.

D E F I N I T I O N II.

2. *Le Corps fluide* est celui dont les parties sont unies , de maniere à pouvoir être séparées très-facilement.

Remarque.

3. Cette propriété des fluides se reconnoît en ce qu'ils laissent au milieu d'eux un passage libre aux autres corps ; que leur poids les fait tomber en gouttes ; qu'ils prennent aussi-tôt la figure des vases dans lesquels on les verse , & que s'ils n'étoient retenus par ces vases ils s'écouleroient.

D E F I N I T I O N III.

4. *Les corps solides* au contraire sont ceux dont les parties sont si adhérentes les unes aux autres ,

qu'elles ne peuvent être séparées que difficilement.

DEFINITION IV.

5. *Un corps spécifiquement plus léger* est celui qui sous un même volume a moins de pesanteur qu'un autre.

DEFINITION V.

6. *Un corps spécifiquement plus pesant* est au contraire celui qui sous un même volume a plus de poids qu'un autre.

Remarque.

7. Si une boule de plomb occupe le même volume qu'une boule de pierre, la boule de plomb sera plus pesante que celle de pierre : par conséquent le plomb est un corps spécifiquement plus pesant que la pierre, & la pierre au contraire est un corps spécifiquement plus léger que le plomb.

DEFINITION VI.

8. *La force de résistance* est celle qui détruit, en tout ou en partie, l'action d'une autre force.

Axiome I.

9. *Les Corps graves* compriment & tâchent de déplacer ceux qui sont au-dessous d'eux (§. 32. Méchan.)

Axiome II.

10. Plus un corps est pesant, plus il comprime ceux qui sont au-dessous.

Axiome III.

11. Si deux ou plusieurs corps ont la même pesanteur, ils doivent comprimer également.

Axiome IV.

12. Si deux ou plusieurs corps ont la même grandeur, sans avoir la même pesanteur : celui qui a le plus de pesanteur, comprimera davantage que celui qui en a le moins.

Axiome V.

13. Si deux corps se compriment avec des forces égales, mais selon des lignes de direction opposées, il ne s'ensuivra aucun mouvement. Si l'un a plus de force que l'autre n'a de résistance, le plus foible suivra la ligne de direction du plus fort.

Lemme.

14. Si deux cylindres également grands ont cependant la hauteur & leurs bases différentes : la hauteur du premier est contenue autant de fois dans la hauteur du second, que la base de celui-ci est contenue dans la base de celui-là.

Démonstration.

Si vous multipliez les bases de deux cylindres égaux par leurs hauteurs, il en resultera le même produit (§. 197. Géom.) Si la hauteur du premier est en raison réciproque avec la hauteur du second, comme la base du premier avec la base du second, le produit de la base du premier par sa hauteur sera égal au produit de la base du second par sa hauteur (§. 81. Arithm.) Par conséquent si deux cylindres sont égaux, la hauteur du premier est à la hauteur

du second, ce que la base de celui-ci est à la base de celui-là. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème I.

15. Si l'on remplit d'eau deux tubes qui se communiquent, l'eau sera à hauteur égale dans l'un & dans l'autre.

Démonstration.

Pl. I.
Fig. 1.

I. C A S. Si les tubes AB & CD sont à plomb sur la ligne horifontale, & que leurs diamètres soient égaux, l'eau a la même gravité dans l'un & dans l'autre, si elle est à la même hauteur (193. Géom.) par conséquent l'eau EB fait autant d'effort pour chasser l'eau BD que FD lui oppose de résistance (§. 9. 11.) ni l'une ni l'autre ne cèdera sa place (§. 13.) l'eau sera donc à la même hauteur dans les deux tubes. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Fig. 2.

II. C A S. Mais si la base du tube GI est quatre fois plus grande que celle du tube HK, & que l'eau descende, par exemple, d'un pouce depuis L jusqu'à O, il faut nécessairement qu'elle monte de quatre pouces dans le petit depuis M jusqu'à N (§. 14.) car supposons que dans le grand tube une livre en mette quatre en mouvement, il en faudra quatre pour en faire mouvoir une dans le petit; par conséquent comme l'un & l'autre mouvement demandent la même force, & que leurs lignes de direction sont contraires, l'eau qui est dans le grand tube CI ne peut faire monter plus haut que le point M celle qui est dans le petit HK. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Fig. 3.

III. C A S. Si le tube PQ fait un angle droit avec la ligne horifontale, & que le tube RS en fasse un oblique, la pesanteur de l'eau qui est dans le tube RS est la même que celle d'un globe sur un

plan incliné : par conséquent l'eau qui est dans le tube RS a autant de force que celle du tube TV. Si l'un & l'autre sont de même hauteur (§. 82. Mécan.) : or par les raisons du premier & du second cas, l'eau qui est dans le tube TV soutient celle du tube PQ. Elle doit donc être en équilibre dans les tubes PQ & RS, si la colonne est égale. *Troisième cas qu'il falloit démontrer.*

IV. C A S. Il s'ensuit de ce que nous venons de Fig. 4. dire, que le même équilibre de l'eau doit se trouver dans les tubes XW & YZ, si elle monte aussi haut dans l'un que dans l'autre, quoique les tubes aient un diamètre différent, & qu'ils ne fassent point les mêmes angles avec la ligne horizontale. *Ce qu'il falloit aussi démontrer.*

Corollaire I.

16. Si donc après avoir pris la précaution d'en- Fig. 5. duire avec de la poix ou autre matière, tout le dedans du vaisseau AB, vous y insérez un long tube par son fond supérieur C, de façon que l'eau ni l'air ne puisse pénétrer dans le vaisseau que par le tube ; & qu'ensuite vous remplissiez d'eau le tube & le vaisseau, vous verrez que le peu d'eau que renferme le tube CD pressera si fort le fond AE, qu'elle pourroit enlever un poids de cent livres, parce que l'effort que fait l'eau dans le tube CD est aussi grand qu'il le feroit dans tout le cylindre FA.

Corollaire II.

17. C'est pourquoi il ne faut regarder dans la pression des fluides que leur hauteur & la grandeur de la base qui résiste à la pression.

Théorème II.

Fig. 1.

18. Si l'on remplit deux tubes qui se communiquent, de liqueurs de différente pesanteur, la hauteur du fluide spécifiquement plus léger est à la hauteur du plus pesant, comme la gravité du plus pesant à la gravité du plus léger sous un même volume.

Démonstration.

Fig. 1.

Mettez, par exemple, du mercure dans le tube CD, & de l'eau dans le tube AB. Comme le mercure est quatorze fois plus pesant que l'eau, elle doit monter quatorze fois plus haut dans le tube AB que le mercure dans le tube CD : car si les tubes sont de même grandeur, les cylindres sont en même raison que leurs hauteurs (§. 210. Géom.) par conséquent si le mercure monte quatorze fois moins haut dans le tube CD que l'eau dans le tube AB, il y aura quatorze fois plus d'eau dans le tube AB, que de mercure dans le tube CD ; par conséquent la pesanteur de l'eau fera égale à celle du mercure : c'est pourquoi comme le mercure presse autant vers DB que l'eau vers BD (§. 11.) l'un & l'autre doivent être en équilibre (§. 13.) : & comme il n'importe que les tubes aient le même diamètre, ou qu'ils soient perpendiculaires sur la ligne horizontale (§. 15.) le mercure & l'eau demeureront toujours en équilibre, quoique la hauteur de l'eau soit quatorze fois plus grande que celle du mercure. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème III.

19. Si l'on jette dans un fluide un corps qui a

D'HYDROSTATIQUE. 335

plus de pesanteur spécifique que lui, ce corps perd autant de son poids qu'en a le fluide dont il prend la place.

Démonstration.

Supposons, par exemple, qu'on plonge dans l'eau un pied cubique de plomb; le pied cubique d'eau qu'il chasse étoit soutenu par celle qui l'environnoit; or si le plomb prend sa place, il faut que l'eau qui l'environne soutienne une partie du poids égale à celle de l'eau dont il a pris la place; par conséquent le plomb perd autant de son poids qu'en a un pied cubique d'eau. *Ce que j'avois à démontrer.*

Corollaire I.

20. Comme un pied cubique de fer perd autant qu'un pied cubique de plomb, quoique celui-ci soit plus pesant que l'autre, il est évident que le fer & tout autre corps qui a plus de légèreté spécifique, perd dans un fluide, par exemple, dans l'eau, une plus grande partie de son poids que le plomb ou tout autre corps spécifiquement plus pesant.

Corollaire II.

21. Quoique un corps qui a plus de pesanteur spécifique qu'un autre soit avec lui en équilibre dans l'air, le plomb, par exemple avec le fer, ils ne le seront pourtant pas dans l'eau ou dans tout autre fluide; mais le plomb gravitera davantage.

Corollaire III.

22. Comme un pied cubique de plomb plongé dans l'eau perd autant de son poids qu'en a un pied cubique d'eau, & que dans le vin au contraire il

n'en perd qu'autant qu'en a un pied cubique de vin. Le plomb perd plus de son poids dans l'eau, que dans le vin, & par conséquent tout corps perd plus de son poids dans un fluide qui a plus de pesanteur spécifique, que dans celui qui en a moins.

Corollaire IV.

23. De-là vient que deux livres de plomb, dont on plonge l'une dans l'eau & l'autre dans le vin, ne sont point en équilibre: & en général deux corps de même espèce & de même grandeur ne sont point en équilibre si on les plonge dans les fluides de différente gravité.

Corollaire V.

24. La pesanteur d'un fluide est à la pesanteur d'un corps de même grandeur, comme la partie du poids qu'il perd à son poids entier. Par exemple, la pesanteur de l'eau est à la pesanteur du fer comme la partie du poids qu'il perd dans l'eau à son poids entier.

Problème I.

25. Trouver le poids de quelque fluide que ce soit, du vin par exemple, qui est dans un tonneau.

Solution.

1°. J'attache un ponce cubique de plomb à un fil, je le plonge dans le fluide, par exemple dans le vin, & je remarque la quantité du poids qu'il perd; je connois alors quel est le poids d'un ponce cubique du fluide donné. (§. 19.)

2°. Déterminez géométriquement le volume du fluide, par exemple, du vin qui est dans un tonneau. (§. 215. Geom.) cela fait, vous trouverez par la
Regle

D'HYDROSTATIQUE. 337

Regle de trois (§. 85. Arithm.) le poids de tout le fluide.

EXEMPLE.

Un pied cubique de plomb selon la mesure de Paris, perd dans l'eau 72 livres. On demande le poids de 345 pieds cubiques d'eau.

$$\begin{array}{r} 1' - 72. \text{ liv.} - 345 \\ \quad \quad \quad 72 \\ \hline \quad \quad \quad 690 \\ \quad \quad 2415 \\ \hline \end{array}$$

Le poids de l'eau est de 24840 liv.

Corollaire.

26. Ayant déterminé le poids du fluide, vous pourrez pareillement trouver son volume. Vous demandez, par exemple, quel espace occupent 325000 liv. d'eau.

$$\begin{array}{r} 72 \text{ liv.} - 1' - 325000 \text{ liv.} \\ 16 \quad \quad \quad 1 \\ \hline 3227 \quad \quad \quad 325000 \\ 47384 \\ 329888 (4513' 8 \text{ le volume d'eau.} \\ 72222 \quad \quad \quad 9 \\ 777 \end{array}$$

Problème II.

27. Trouver en quelle raison est la pesanteur, d'un fluide avec la pesanteur d'un autre fluide sous un même volume.

Solution.

1°. Examinez combien un ponce cubique de pier-

re perd de son poids dans l'eau ; vous connoîtrez par-là le poids d'un ponce cubique d'eau (§. 19.)

2°. Examinez également combien le même ponce cubique de pierre perd de son poids dans un autre fluide , dans de l'huile , par exemple ; vous connoîtrez de même le poids d'un ponce cubique d'huile (§. 19. Ainsi la pefanteur de l'eau est à la pefanteur de l'huile, comme le poids que perd un ponce cubique de pierre dans l'eau , au poids qu'il perd dans l'huile.

Par exemple. Un pied cubique de pierre perd 72 livres dans l'eau & 66 dans l'huile ; la pefanteur de l'eau est donc à la pefanteur de l'huile , comme 72 liv. font à 66 , ou comme 12 font avec 11 (§. 59. Arith.)

Problème III.

28. Connoissant le poids d'un corps composé de deux matieres , & la quantité qu'il perd de son poids dans un fluide , trouver le poids de l'une & de l'autre matiere en particulier.

Solution.

1°. Prenez séparément une livre , ou telle autre quantité de chaque matiere , & par l'expérience que vous en ferez , déterminez ce qu'elle perd de son poids dans un fluide.

2°. Vous chercherez ensuite par la Regle de trois ce qu'un volume de chacune devoit perdre dans le même fluide , s'il pesoit autant que tout le corps composé.

3°. Soustrayez la diminution de l'une & de l'autre pour connoître combien le corps qui a moins de pefanteur spécifique a plus perdu de son poids que le corps qui en a davantage.

4°. Retranchez encore le poids du corps qui a le plus de gravité spécifique , de la diminution du poids qu'a le corps mixte , pour connoître de combien la perte du poids, que ce corps mixte a fait, est plus grande que celle du corps spécifiquement plus pesant.

5°. Que si vous cherchez un quatrième nombre proportionnel à l'excès du premier , à celui du second & au poids du corps mixte, (§. 85. Arith.) ce quatrième nombre proportionnel sera le poids du corps mixte spécifiquement plus léger , lequel étant ôté du poids du corps mixte , il restera le poids du volume qui a le plus de pesanteur spécifique ; & par-là vous trouverez ce que vous demandez.

E X E M P L E.

Une masse composée d'étain & de plomb du poids de 120 liv. en perd 14 quand on la plonge dans l'eau. On demande quel est le poids du plomb ? quel est celui de l'étain ? l'expérience fait connoître qu'une masse d'étain de 37 liv. en perd cinq étant plongée dans l'eau , & qu'une masse de plomb de 23 liv. en perd 2 étant plongée dans le même fluide. Cela connu , vous ferez ainsi votre calcul.

$$\begin{array}{r}
 37 - 5 = 120 \\
 \underline{5} \\
 600 \\
 \underline{37} \\
 23 - 2 = 120 \\
 \underline{2} \\
 240 \\
 \underline{\quad} \\
 23
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 600 - 240 = 360 \\
 37 \quad 23 \quad 851 \\
 \hline
 14 - 8880 = 8894 \\
 851 \quad 851 \quad 851 \\
 \hline
 11914 - 8880 = 3034 \\
 851 \quad 851 \quad 851 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$4920 - 3034 = 1886$$

$$41 \quad 1 (120$$

$$1$$

$$26$$

3034 (74. liv. le poids spécifique-
ment plus léger.

411 | 120 poids du mixte.

4 | 46 le poids spécifiquement
plus pefant.

Remarque.

29. On peut réfoudre de la même façon le problème qui donna naiffance à l'hydroftatique , & qu'Archimede explique le premier ; fçavoir combien l'ouvrier avoit mêlé d'argent avec l'or dont il avoit fait la couronne du Roi de Siracufe, qui péfoit 18 livres ; car comme 18 liv. d'or en perdent une dans l'eau, & 18 liv. d'argent $1\frac{1}{2}$, il s'apperçut que la couronne en perdit $1\frac{1}{2}$, & il découvrit par-là qu'il y avoit dans cette couronne 12 liv. d'argent mêlées avec six liv. d'or.

Théorème I V.

30. Si l'on plonge un corps dans un fluide qui ait moins de pefanteur spécifique que lui , il ne defcend au fond qu'avec une force égale à la différence de fon poids , & de celui du fluide de même volume.

Démonstration.

Ce corps plongé dans un fluide perd une partie de son poids égale au poids du fluide dont il occupe la place (§. 19.) par conséquent il ne peut descendre qu'avec la force qui lui reste, & qui est égale à la différence de son poids & de celui du fluide de même volume.

Corollaire I.

31. La force qui soutient un corps dans l'eau est égale à l'excès de gravité de ce corps au-dessus de la gravité d'un égal volume d'eau. Trente-sept liv. d'étain, par exemple, plongées dans l'eau perdent cinq livres de leur poids; donc trente deux livres d'eau peuvent soutenir trente-sept livres d'étain plongées dans ce fluide.

Remarque.

32. Connoissant la grandeur & la pesanteur d'un solide plongé dans l'eau, on peut déterminer quelle force il faudroit employer pour l'élever au-dessus de ce fluide.

Supposons que le poids d'une masse plongée est de 104500 liv. la grandeur de 340 pieds cubiques; le pied cubique d'eau de 72 liv.

340

72

680

238

24480 liv. le poids d'eau égal à la masse plongée
104500 le poids de la masse.

80020 la force capable de soutenir la masse.

Y iij

Corollaire II.

33. C'est pourquoi le poids d'un corps solide excédant davantage le poids d'un fluide qui a plus de pesanteur spécifique, & dont il a pris la place, qu'il ne feroit dans un fluide qui a moins de pesanteur; il est nécessaire qu'il s'enfonce avec plus de vitesse dans celui-ci que dans celui-là. Par exemple une boule de plomb s'enfonce plus vite dans le vin que dans l'eau.

Théorème V.

34. Si un corps est plongé dans un fluide qui a plus de pesanteur spécifique que lui, ce corps s'enfoncera dans ce fluide, par exemple, dans l'eau jusqu'à ce que l'eau, qui rempliroit l'espace occupé par la partie du corps plongé, soit en équilibre avec tout le corps entier.

Démonstration.

Supposons que ce corps est un cylindre de bois. Concevons le fluide comme composé de plusieurs cylindres qui pèsent tous également, parce qu'ils ont tous une hauteur égale (§. 15.) Or si le cylindre de bois est plongé dans l'eau, le cylindre d'eau qui est sous lui doit plus presser que les collatéraux ne résistent (§. 10.); il chassera donc en haut l'eau collaterale (§. 13.) & le cylindre de bois s'enfoncera. Or si-tôt que le cylindre de bois a chassé une quantité d'eau égale à son propre poids entier, le cylindre d'eau qui le soutient, n'est pas plus pesant qu'il l'étoit, lorsque l'eau occupoit la place du cylindre de bois; par conséquent le cylindre de bois ne s'enfoncera pas plus avant, & il n'occupera que la place des parties d'eau qui ont été

chassées , parce que actuellement comme auparavant elles pèsent autant que lui. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

35. Si vous plongez le même corps dans des fluides de différente pesanteur spécifique, il doit s'enfoncer plus avant dans celui qui est moins pesant que dans celui qui l'est davantage. Par exemple , plus dans le vin que dans l'eau , parce que le vin a moins de pesanteur spécifique que l'eau , & parce que la gravité de ce corps approche moins de celle de l'eau que de celle du vin.

Corollaire II.

36. Un corps s'enfonce plus avant dans un fluide à proportion de ce qu'il approche davantage de la gravité de ce fluide. Par exemple , un morceau de bois qui a plus de pesanteur spécifique qu'un autre , doit s'enfoncer davantage que celui qui en a moins.

Corollaire III.

37. Si ce corps a la même pesanteur spécifique que le fluide , de façon que , par exemple , un pied cubique de ce corps pèse autant qu'un pied cubique d'eau , tout le corps s'enfonce & demeure en quelque lieu du fluide qu'on le mette.

Corollaire IV.

38. S'il n'y a que la quatrième partie de ce corps qui soit plongée , la quatrième partie d'autant d'eau , pèse autant que le corps tout entier : c'est pourquoi si vous prenez quatre parties d'eau , c'est-à-dire , autant qu'il en tiendrait dans l'espace que le corps occupe , leur poids est quatre fois plus

grand que celui du corps ; par conséquent la pesanteur du corps est à la pesanteur du fluide de même que la grandeur de la partie plongée à la grandeur entière de tout le corps.

Corollaire V.

39. Il s'ensuit encore de-là qu'un corps spécifiquement plus léger qu'un fluide, ne s'élèvera point du fond du vase où on l'aura mis, si un fluide spécifiquement plus pesant, qu'on y auroit versé ne s'élève lui-même au-dessus de la partie du corps qui se trouve plongée, pendant qu'il nâge dans le vase plein de ce fluide.

Problème IV.

40. Connoissant la pesanteur d'un pied cubique d'eau & la grandeur de la partie du solide qui est plongée, trouver le poids de tout le corps.

Solution.

Comme le poids d'un corps solide est égal au poids de l'eau qui occupe le même espace que la partie plongée (§. 34.) dites ; la partie plongée d'un solide est au poids du solide entier, comme un pied cubique d'eau à sa pesanteur connue : ce que vous trouverez par la Règle de Trois. (§. 85. Arithm.)

EXEMPLE.

Le pied cubique d'eau est de 72 liv. la partie du corps qui est plongée est de 740 pieds cubiques.

$$1 - 72. \text{ liv.} - 740'$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ \hline 1480 \\ 518 \end{array}$$

53280 l. le poids de tout le corps.

Problème V.

41. Connoissant la gravité d'un pied cubique d'eau & celle du corps solide, trouver la grandeur de la partie qui doit être plongée.

Solution.

Le poids du corps donné étant à la grandeur de la partie qui doit être plongée, comme la pèsanteur d'un pied cubique d'eau est à l'égard de la grandeur du même pied cubique. (§. 34.) vous trouverez encore par la Regle de trois (§. 85. Arith.) la grandeur que vous cherchez de la partie qui doit être plongée.

EXEMPLE.

Le pied cubique d'eau est de 72 liv. la pèsanteur du corps de 53280. liv.

$$72 \text{ liv.} - 1' - 53280 \text{ liv.}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 53280 \end{array}$$

2

48

53280 (740'. la grandeur de la partie qui doit être plongée.

7222

77

Remarque.

42. La résolution de ce Problème vous fera trouver la quantité du poids qu'un vaisseau peut porter.

Problème VI.

43. Connoissant la grandeur & la pesanteur d'un solide, par exemple, d'un morceau de bois, & la pesanteur d'un fluide spécifiquement plus pesant, par exemple d'un pied cubique d'eau, trouver la force qui peut retenir ce corps au fond du fluide.

Solution.

Il est évident par le (§. 34.) que cette force doit égaler l'excès du poids de l'eau qui occupe la même place que ce solide, au-dessus du poids de ce solide.

1°. Cherchez donc par la Règle de trois (§. 85. Arithm.) la pesanteur de l'eau qui occupe la même place que tout le solide, par la pesanteur donnée d'un pied cubique d'eau, & la grandeur du solide que vous connoissez aussi.

2°. Soustrayez ensuite le poids du solide, le reste sera la puissance que vous cherchez.

E X E M P L E.

Le pied cubique d'eau pèse 72 liv. le corps solide qui doit être retenu au fond de l'eau en pèse 100. la grandeur est de 8 pieds cubiques : cela supposé.

$$\begin{array}{r} 1' - 72 - 8' \\ 8 \end{array}$$

576 liv. le poids de l'eau égale au solide.
100 liv. le poids du corps.

La puissance qui retient le corps au fond de l'eau doit être de 476 liv.

Corollaire.

44. Comme le corps est poussé en haut par la même force qui pourroit le retenir au fond du fluide, on peut trouver par le même Problème quelle est la force qui pousse en haut un corps plus léger que le fluide dans lequel il est. Elle est la même que dans l'exemple précédent de 476. liv.

Théorème VI.

45. La puissance nécessaire pour enfoncer dans l'eau le vase vuide AB jusqu'à la ligne AC; ligne jusqu'à laquelle s'il étoit rempli, il s'enfonceroit; cette puissance est égale à celle qui pourroit soutenir en l'air autant d'eau qu'il en tiendrait dans le vase jusqu'à la ligne AC. Fig. 6.

Démonstration.

La puissance ou la force qui soutient l'eau en l'air est égale à sa pesanteur; or la force qui enfonce dans l'eau le vase vuide jusqu'à la ligne AC, pèse autant que l'eau qui le remplit, puisqu'elle est supposée enfoncer le vase jusqu'à cette ligne; donc cette force égale celle qui pourroit soutenir l'eau contenue dans le vase (§. 22. Arithm.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Théorème VII.

46. La force qui est nécessaire pour retenir un corps qui a moins de pesanteur, sous un fluide qui en a davantage, & le poids que ce corps perd augmentent la pesanteur du fluide, & pèsent avec lui.

Démonstration.

La force nécessaire pour retenir un corps qui a

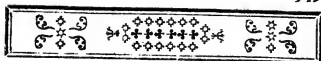
moins de la force sous un fluide qui en a davantage, gravite sur le fluide, de sorte que c'est comme si une masse de même poids lui étoit ajoutée. Or cette masse ne faisant qu'un corps grave avec le fluide pèseroit avec lui; donc une force égale à cette masse doit pèser avec le fluide. Voilà le premier article.

Quand a l'égard, la partie du poids que perd dans un fluide plus léger un corps qui a plus de pesanteur, est soutenue par ce fluide, comme nous l'avons démontré dans le Théorème 3. (§. 19.) Or cette partie du poids jointe avec l'eau qui est dessus & dessous dans le même cylindre, pesant autant que l'eau qui l'environne, il est nécessaire qu'elle comprime le fond du vaisseau avec cette eau, & que par conséquent elle gravite avec elle. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

47. On prouve aisément par l'expérience ce que nous avons démontré jusqu'ici. Nous devons regarder ces expériences comme des examens qui nous prouvent la bonté, la justesse & la vérité de nos raisonnemens.

Fin de l'Hydrostatique.



E L E M E N S

D' A I R O M E T R I E.

D E F I N I T I O N I.

1. **L'***Airométrie* est la Science de mesurer l'air , ou la Science qui nous apprend à connoître les différens degrés de pesanteur , de ressort , de compression , de dilatation , &c. de l'air.

D E F I N I T I O N I I.

2. *Mesurer*. C'est prendre pour une unité une certaine quantité ou grandeur d'un corps , & chercher le rapport que les autres grandeurs ou quantités de même espèce ont avec celle qu'on ne considère que comme une unité.

Remarque.

3. Par exemple , je veux mesurer une pièce d'étoffe , je prends une grandeur déterminée que j'appelle aune , & que je considère comme une unité : j'examine combien de fois la longueur de cette aune se trouve dans la longueur de l'étoffe. Veux-je mesurer la chaleur de l'air ? je prends pareillement un certain degré de chaleur pour une unité , & je

cherche ensuite le rapport que la chaleur entière de l'air a avec ce degré déterminé ; c'est-à-dire , que j'examine combien de fois ce degré déterminé se trouve dans la chaleur entière que je veux mesurer. (§. 52. Arith.)

Corollaire.

4. Comme sous le terme de quantité est compris tout ce qui peut être augmenté ou diminué , on peut mesurer tout ce qu'on peut concevoir dans l'air , susceptible de dilatation ou de raréfaction.

DEFINITION III.

5. Par *l'air* j'entends un corps fluide répandu autour de la terre , qui occupe les espaces que les autres corps abandonnent , & qui nous paroissent vuides , à moins qu'un autre corps plus fort ne l'en empêche.

Remarque.

6. Nous ne donnons ici à l'air que la propriété essentielle qui peut le faire connoître.

Corollaire.

7. Si l'on pousse la main avec célérité dans l'espace qui nous paroît vuide , & vers le visage , on sent que quelque corps le touche légèrement , quoique la main ne le touche pas. Il faut donc que ces espaces soient remplis d'une certaine matiere très-subtile qu'on ne voit point , & dont les parties ne sont pas assez adhérentes les unes aux autres pour empêcher le mouvement des corps. Il y a donc un fluide très-subtil qui remplit sur la terre les espaces

que les autres corps abandonnent, (§. 2 Hydrost.)
c'est-à-dire que l'air existe. (§. 5.)

DEFINITION IV.

8. Un Corps est comprimé lorsque la matiere dont il est composé, est resserrée dans un plus petit espace que celui qu'elle occupoit.

DEFINITION V.

9. Un corps se dilate lorsque sa matiere remplit un plus grand espace qu'auparavant.

Remarque.

10. La matiere propre d'un corps est celle qui pèse avec lui, qui est en mouvement avec lui, & qui dans ce mouvement va heurter contre les autres corps. Pour la matiere qui passe librement à travers d'un corps, nous l'appellons *matière hétérogene ou étrangere*.

Problème I.

11. Faire une *Pompe pneumatique*; c'est-à-dire, un instrument par le moyen duquel on puisse tirer tout l'air d'un vaisseau.

Solution.

1°. Faites un cylindre creux de laiton AB, & dont la surface intérieure soit extrêmement unie, afin que le *Piston* DE la frotte exactement de toutes parts, & que la moindre partie d'air ne puisse s'échapper. Fig. 1.

2°. Le *Piston* doit être composé de cercles de cuir enduits de graisse cuite de cochon, & d'huile d'olives, & renfermés entre deux autres cercles

de cuivre , l'un à la partie supérieure D , & l'autre à la partie inférieure E , lesquels cercles de cuivre sont retenus par une vis. Attachez ensuite au piston une lame de fer DC dentée depuis C jusqu'à D , afin que par le moyen de la manivelle NO , & d'une petite roue dentée attachée au cylindre , on puisse l'introduire & le retirer commodément. Il est bon de remarquer qu'on feroit bien de prendre à cet effet du cuir dont on fait les ceinturons des soldats ; c'est-à-dire , du cuir de bœuf , ou plutôt celui de cerf , étant plus souple que l'autre.

3°. Il faut souder à la base du cylindre B un petit tube BFKL , dans lequel on puisse introduire un robinet GHI au point F , afin de pouvoir ouvrir ou fermer la pompe quand on voudra. Le robinet doit être percé au milieu , pour que l'air puisse s'introduire dans la pompe après avoir passé par le petit tube LK ; il doit l'être encore , mais obliquement à un de ses côtés , dans la partie supérieure , afin que l'air qui est dans la machine puisse sortir par la cavité du piston. Dans le haut est une aiguille de laiton pour fermer la cavité du robinet lorsque le cas l'exige.

4°. Enfin le tube KL doit avoir une vis au point L pour tenir fermes les vaisseaux dont on veut pomper l'air , & dont les orifices seront fermés de vis femelles. C'est ainsi qu'il faut , quand l'usage le demande , adapter le bassin de laiton PQ sur lequel on puisse mettre commodément un verre en forme de cloche.

Remarque.

12. On soude un bassin au-dessus vers le point A , & l'on y met de l'eau , pour empêcher que l'air , la poussière , ou telle autre ordure que
ce

te puisse être, ne s'introduise entre le piston & la superficie intérieure du cylindre. On couvre le fond du bassin avec un cuir mouillé, parce que sans cette précaution les cloches de verre ne joindroient pas assez exactement pour empêcher l'air d'entrer. C'est pour cela qu'on garnit les tuyaux avec des cercles de cuir imbibé de suif chaud. Lorsque le piston a de la peine à entrer, il faut l'enduire d'huile d'olive, & le robinet de suif chaud.

Experience I.

13. Si vous mettez sous une cloche de verre une vessie d'agneau toute flasque, n'ayant d'autre air que celui qui est dans les plis, & fermée avec un cordon par le col; cette vessie s'enflera à proportion de l'air que vous tirerez de la cloche. Que si vous laissez rentrer l'air par le moyen du robinet, la vessie désefflera, deviendra flasque, & reprendra son premier état.

Corollaire.

14. Comme il ne reste dans la vessie que le peu d'air qui se trouve dans les replis, il faut que cet air se dilate, à mesure qu'on pompe celui qui l'entoure. (§. 9.) autrement la vessie ne s'enfleroit point. Et comme elle s'enfle à proportion qu'on pompe l'air qui l'environne; il est clair qu'il faut qu'il y ait dans l'air une élasticité ou vertu de dilatation, & qu'à moins qu'une puissance plus forte lui résiste, elle aura constamment son effet.

DEFINITION 1.

15. Nous appellerons dans la suite force élastique.

que, celle qui rend l'air capable de compression & de dilatation.

Corollaire.

Fig. 1.

16. Si vous tirez le piston DE de la machine pneumatique AB, il se fait dans la cavité de cette machine un espace vuide, dans lequel l'air extérieur n'a aucune entrée. Que si vous ouvrez le robinet GH, l'air qui est sous la cloche du bassin PQ se dilate & s'introduit par le tuyau LKF dans la cavité de la machine, jusqu'à ce qu'il soit également condensé par tout. Ainsi celui qui est resté dans la cloche est plus rarefié qu'il ne l'étoit auparavant. Si après cela vous tournez le robinet GH de façon que l'ouverture oblique qui est au-dessus reponde à la cavité de la machine, si vous tirez l'aiguille de laiton, & que vous poussiez le piston DE dans la pompe; l'air sera chassé par le tuyau FG, & par le robinet GK.

Expérience II.

Fig. 4.

17. Attachez avec du ciment à un globe creux & d'un assez gros volume A, un tuyau de cuivre court, armé d'un robinet & d'une vis femelle B, pour qu'on puisse le fermer & l'attacher à la pompe L. Pompez autant que vous le pourrez tout l'air qu'il contient; après cela fermez le robinet, & tirez ce globe de dessus la machine. Vous le mettez dans un des bassins d'une balance, & vous chargerez l'autre avec des poids, jusqu'à ce qu'ils soient en équilibre avec ce globe. Si vous ouvrez ensuite le robinet, vous entendrez l'air du dehors y entrer avec bruit, & le globe deviendra plus pesant qu'il n'étoit lorsqu'il étoit vuide.

Fig. 1.

Corollaire I.

18. Puisque ce globe plein d'air pèse plus dans la balance que s'il étoit vuide, il est donc clair que l'air est pèsant. (§. 32. Méc.)

Remarque première.

19. C'est en suivant cette méthode que Burcher de Volder a découvert qu'un pied cubique d'air pèse une once & 27 grains, ou presque 507 grains. Voyez les questions académiques sur la gravité de l'air. Thèse 48. pag. 50. & les suiv.

Corollaire II.

20. L'air étant susceptible de compression, & le supérieur gravitant sur l'inférieur (§. 18. Aïrom. & §. 9. Hydrost.) il n'est pas surprenant que celui-là soit plus rarefié, & celui-ci plus condensé.

Corollaire III.

21. Il s'enfuit de-là qu'un volume d'air inférieur a plus de pèsanteur spécifique qu'un égal volume d'air supérieur, puisqu'un même espace contient plus de parties du premier que du second.

Remarque seconde.

22. Il n'est donc point surprenant que les vapeurs qui montent par l'air inférieur, s'attachent à l'air supérieur, & demeurent suspendues. (§. 37. Hydrost.)

Théorème I.

23. La vertu élastique de l'air est égale à la force qui le comprime.

Démonstration.

L'air étant moins comprimé par une force plus petite qu'il ne l'est par une plus grande, sans doute qu'il résiste à cette force ; or l'air a une vertu élastique dont la propriété est de faire effort pour se dilater autant qu'il est possible (§. 15.) il faut donc pour avoir cet effet, qu'il résiste par sa vertu élastique à la force qui le comprime (§. 8. Hydrost.) & comme celle-ci ne peut rien de plus sur celle-là, il faut qu'elles soient égales (§. 13. Hydrost.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

24. Par conséquent plus l'air est comprimé ; plus sa vertu élastique acquiert de force ; au contraire plus il est rarefié, plus elle est foible.

Corollaire II.

25. Si l'air est donc comprimé dans un espace deux fois plus étroit, sa vertu élastique devient plus forte du double. Si l'espace est trois fois plus étroit, elle est plus forte du triple, &c. qu'elle n'étoit auparavant.

Corollaire III.

26. La force élastique de l'air inférieur est aussi grande que la gravité du supérieur qui le comprime.

Corollaire IV.

27. L'air inférieur fait par son élasticité ce que le supérieur fait par sa gravité.

Expérience III.

28. Si vous remplissez d'eau un tube dont la longueur surpasse 32 pieds du Rhin, & dont l'ouverture supérieure soit bien bouchée, & celle d'enbas fermée par un robinet; tenant après cela le tube élevé verticalement, plongez le robinet dans l'eau; si ayant ouvert l'orifice vous ouvrez aussi le robinet, toute l'eau s'écoulera; mais si vous ouvrez seulement le robinet, l'orifice étant toujours bien bouché, l'eau restera suspendue à la hauteur de 31 ou 32 pieds au-dessus du niveau de l'eau dans laquelle le tuyau est plongé.

Corollaire I.

29. Puisque l'eau suspendue dans le tube comprime celle qui est dans le petit vase placé au-dessous (§. 9. Hydrost.) & que cependant celle-ci ne lui cède pas, il faut donc qu'elle soit comprimée également tout à l'entour; or l'air en s'appuyant sur l'eau la comprime (§. 18.); par conséquent l'air comprime la surface de l'eau qui environne le tube avec une force égale à celle du cylindre d'eau qui a pour base le cercle de cette surface, & 32 pieds du Rhin de hauteur. Une colonne d'air dont le diamètre est égal au diamètre du tube, & dont la hauteur s'étend depuis la surface de l'eau du vase, jusqu'au haut de l'atmosphère, ne pèse donc pas plus que la colonne d'eau de 32 pieds de hauteur.

Corollaire II.

30. Puisque l'air tient l'eau suspendue dans le tube à la hauteur de 32 pieds, & que le mercure est quatorze fois plus pesant que l'eau; l'air ne

tiendra donc le mercure suspendu dans le même tube qu'à la hauteur de la quatorzième partie de 32 pieds (§. 18. Hydrost.)

Remarque.

Fig. 3.

31. De-là vient que si vous remplissez de mercure un tube de verre AB dont l'orifice supérieur soit fermé hermétiquement, & que vous plongiez ce tube dans un vase plein de mercure ; celui qui est dans le tube ne tombera pas absolument ; mais il sera suspendu à la hauteur d'environ 28 pouces. Toricelli a fait cette decouverte ; c'est pourquoi on appelle ce tube, *le tube de Toricelli*, ou *Baromètre*. Que si vous jetez de l'eau dans le vase où est le mercure, il montera plus haut dans le tube, parce que l'air pèse alors avec l'eau, & leur action étant réunie, elle devient plus forte : au contraire si vous mettez ce tube sous une cloche de verre à grand col, & dont vous pompez l'air, à mesure que l'air manquera, le mercure descendra.

Problème II.

32. Connoissant la base d'une colonne d'air ; trouver le poids de cette colonne.

Solution.

1°. Multipliez la base de la colonne d'air par la hauteur d'une colonne d'eau d'égale pesanteur (§. 29) le produit fera la solidité de la colonne d'eau ayant un même poids avec la colonne d'air. (§. 197. Géom.)

2°. Si vous connoissez le poids d'un pied cubique d'eau, vous trouverez aussi par la Regle de Trois

D'AIROMETRIE. 359

celui de la colonne d'air. (§. 85. Arithm.)

EXEMPLE.

Soit le diamètre du cercle 100^m l'aire sera de 7850^m (§. 134. Géom.)

La hauteur de la colonne d'eau de 3100^m

$$\begin{array}{r} 785000 \\ 23550 \end{array}$$

La solidité de la colonne d'eau de 24335000^m

$$\begin{array}{r} 1000'' - 72 \text{ liv.} \\ 24335'' \\ 72 \end{array}$$

$$48670$$

$$170345$$

$$1752120$$

1752120 (1752 $\frac{3}{5}$ le poids de la colonne d'air.

1 000

Corollaire.

33. Si le diamètre d'une sphère est 1, la base de la colonne d'air qui tombe sur cette sphère sera un cercle dont le diamètre est 1 ; c'est-à-dire, le plus grand cercle d'une sphère ; par conséquent son poids est de 1752 liv. On doit remarquer que cette colonne presse également dessus & dessous. (§. 26. 27.)

Théorème II.

34. Si un vase est rempli d'air, il n'éprouve aucun effet de la pression de celui qui l'environne ; mais si on ôte cet air, l'effet qui s'ensuit répond à la force de l'air extérieur qui le comprime.

Démonstration.

Si l'air qui remplit le vase a la même densité que

Z iij

celui qui l'environne , l'élasticité de l'air renfermé est égale à la force de l'air extérieur qui le comprime (§. 23.) donc l'air renfermé dans le vase oppose autant de résistance à l'air extérieur , que celui-ci fait d'effort pour le comprimer ; par conséquent la pression de l'air qui environne ne se fait nullement sentir dans le vase (§. 13. Hydrost.) *Ce qui forme la preuve du premier article.*

Si l'on a pompé l'air du vase en tout ou en partie seulement ; (§. 11.) dans le premier cas le vase ne résiste pas à la pression de l'air extérieur , & dans le second cas , cette partie d'air qui est restée , devient plus raréfiée que l'air extérieur , (§. 16.) par conséquent son élasticité n'a plus la même force , & elle devient comme celle d'un ressort détendu. (§. 24.) Or n'y ayant rien , ou presque rien dans le vase qui résiste à la pression de l'air extérieur , il doit avoir son effet proportionné , ou à la force de tout l'air qui comprime , ou à l'excès qui l'emporte sur la résistance que peut faire l'air intérieur (§. 13. Hydrost.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

35. Vous pouvez tirer de-là , la raison pourquoi une cloche de verre placée sur un disque de cuivre , & dont on pompe tout l'air , y est si fortement attachée qu'on ne peut absolument l'en arracher ; pourquoi deux hémisphères de cuivre dont on a pareillement pompé l'air , & dont les bords ont été frottés de suif , se tiennent si étroitement unis , que tous les efforts de plusieurs chevaux ne sont pas capables de les séparer ; pourquoi enfin , les verres dont la forme est angulaire se brisent par la pression de l'air extérieur , pendant qu'on pompe

l'air qu'ils contiennent ; & ainsi de mille autres effets.

Théorème III.

36. Si on laisse un peu d'air sur le mercure dans le tube de Toricelli, ce mercure demeurera suspendu à une moindre hauteur que si le tube étoit entièrement vuide.

Démonstration.

Si l'air intérieur a la même densité que l'air extérieur, il n'est en équilibre avec lui que par la force de son élasticité (§. 23. Airom. & 13. Hydrost.) le mercure commence donc à descendre par la force de sa propre gravité (§. 13. Hydrost.) Alors l'air renfermé se dilate ; (§. 14.) & en se dilatant, sa vertu élastique s'affoiblit ; (§. 24.) étant ainsi raréfié, il n'est plus en équilibre avec l'air extérieur (§. 13. Hydrost.) qui presse le mercure pour le faire remonter dans le tube ; mais alors le mercure, trouvant l'air intérieur qui s'y oppose, il ne peut monter à une hauteur aussi grande que s'il ne rencontroit point d'obstacle. Par conséquent il demeurera suspendu à une moindre hauteur que si le tube étoit entièrement vuide. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

37. Comme la gravité du mercure & l'élasticité de l'air sont ensemble en équilibre avec l'air extérieur, il restera donc dans le tube autant de mercure qu'il en faut pour suppléer à ce qui manque à l'air intérieur, afin qu'il puisse demeurer en équilibre avec l'air extérieur.

Corollaire II.

38. Par conséquent l'élasticité de l'air renfermé est équivalente au poids de la colonne de mercure, qu'il seroit nécessaire d'ajouter pour être capable par son propre poids, de demeurer en équilibre avec l'air extérieur.

Théorème IV.

39. Si la pesanteur de l'air diminue, le mercure descend dans le tube; si la gravité de l'air augmente, le mercure doit monter.

Démonstration.

Le mercure suspendu dans le tube est en équilibre avec la pesanteur de l'air; (§. 30.) par conséquent si celle-ci diminue, le mercure n'étant plus tant comprimé descendra; au contraire l'air ayant plus de gravité, le mercure doit nécessairement monter. (§. 13. Hydrost.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

40. Le mercure étant tous les jours ou plus haut ou plus bas dans le tube, quoique cette variation ne soit pas toujours fort sensible, on doit conclure que la pesanteur & l'élasticité de l'air est sujette à bien des changemens.

Corollaire II.

41. Aussi le baromètre n'a-t-il été inventé que pour mesurer les changemens qui arrivent dans la pesanteur de l'air. On l'appelle encore *Baroscope*.

Problème III.

42. Comprimer l'air dans un vase par le moyen de la machine pneumatique.

Solution.

1°. Appliquez le vase AB à la machine. Fig. 4.

2°. Tournez du côté de la cavité de la machine le trou oblique du robinet, & ôtez l'aiguille de laiton I. Fig. 1.

3°. Tirez de la machine le piston DE : alors l'air passant par le trou du robinet & par le tuyau EB, entrera dans la machine.

4°. Tournez ensuite le robinet de façon que le tuyau FK étant ouvert, la communication entre le vase & le cylindre soit aussi ouverte, & que le point I soit bouché.

5°. Alors si vous retirez le piston DE, l'air passera de la machine dans le vase par le tuyau FKL, & il sera nécessairement comprimé. (§. 8.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

43. Pour que cette expérience se fasse avec succès, il faut que le vase soit bien affermi sur la machine, parce que l'air étant comprimé, sa vertu élastique fait beaucoup d'effort (§. 24.) ; & il pourroit arriver que le vase étant déplacé, blesseroit quelqu'un des spectateurs, particulièrement s'il est de verre.

Experience IV.

44. Si vous présentez devant le feu une vessie remplie d'air médiocrement, & liée bien étroite-

ment pour empêcher que l'air n'en sorte, elle se gonflera beaucoup, & pourra même se rompre avec grand bruit : mais si vous la retirez de devant le feu avant qu'elle soit rompue, elle redeviendra flasque & molle comme auparavant.

Corollaire I.

45. Comme malgré la pression de l'air extérieur, la chaleur dilate celui qui est dans la vessie, (§. 9.) il faut que la force qui occasionne cette dilatation (§. 15.) soit plus grande que celle de la pression de l'air extérieur (§. 13. Hydrost.) Il est donc clair que la chaleur deploie la force élastique de l'air.

Corollaire II.

46. Et puisque par l'absence de chaleur la vessie qui étoit tendue devient flasque comme auparavant, il faut donc que le froid diminue la force élastique de l'air.

Corollaire III.

Fig. 1. 47. De-là vient que si vous remplissez d'eau le tube de verre BC, laissant le globe AB rempli d'air, & que vous mettiez l'orifice C dans un vase plein d'eau EF, celle qui est dans le tube BC montera à proportion que l'air fera froid ; elle descendra au contraire, si le froid diminue ou que la chaleur augmente. La raison de ces effets, c'est que dans le premier cas l'air se condense dans le globe, & dans le second il se dilate.

Remarque.

48. Cet instrument a d'abord été en usage pour

mesurer les changemens du froid ou de la chaleur ; & on l'a nommé *Thermomètre* , ou avec plus de raison *Thermoscope*. A la place du vase on a mis le tube sur un autre globe ayant un petit trou. En effet la gravité de l'air pouvant par les variations produire plusieurs changemens (§. 29. 40.) on a été obligé d'inventer différens instrumens pour pouvoir connoître ces variations.

Problème IV.

49. Faire un Thermoscope par le moyen duquel on puisse connoître les changemens du froid & de la chaleur de l'air.

Solution.

1°. Colorez de l'esprit de vin bien rectifié & à l'épreuve de la poudre à canon , avec des morceaux de l'écorce de la racine de curcume ou d'orcanette, la première racine lui donnera une couleur jaune , & la seconde une couleur rouge.

2°. Filtrez ensuite plusieurs fois cet esprit de vin par une feuille de papier gris , afin que les parties de ces racines ne soient point mêlées dans la liqueur.

3°. Remplissez le globe AB & le tube BC de cet esprit de vin filtré , & crainte d'en mettre trop peu, ou qu'en hyver tout l'esprit ne descende dans le globe , il seroit à propos de mettre le globe sur de la neige salée , ou sur de la glace polie , sur laquelle vous aurez jetté beaucoup de sel. Si c'est en été que vous vouliez faire un thermoscope , pour prévenir le même inconvenient , vous mettrez le globe dans de l'eau de fontaine bien fraîche , & dans laquelle vous aurez fait dissoudre beaucoup de nitre ; vous l'y laisserez jusqu'à ce que l'esprit ne descende pas plus qu'il ne faut. Fig. 64

4°. Si l'esprit de vin montoit trop haut au-dessus du globe, il en faut verser un peu, & plonger insensiblement le globe dans de l'eau chaude, non pas tout d'un coup, car il se briseroit, mais on l'expose d'abord à la vapeur de l'eau bouillante, & quand il est échauffé, on le plonge dans l'eau, & pour lors l'esprit montera dans le tube & en chassera l'air. Lorsqu'il commencera à se former de petites ampoules dans l'esprit, il faut retirer promptement le globe de l'eau, autrement l'esprit se répandroit avant que vous vous en fussiez aperçu.

5°. Vous ferez ensuite rougir le bout du tube à la lumière d'une lampe, & vous le fermerez hermétiquement au point C.

6°. Enfin vous appliquerez le tube sur une petite planche légère sur laquelle sera collée une échelle divisée en parties égales, ce qui forme les différens degrés.

Voilà le thermoscope fait.

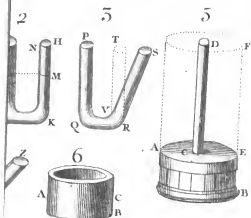
Demonstration.

L'expérience prouve que le froid condense l'esprit de vin, & que la chaleur le raréfie. Or par le moyen de cet instrument on comprend aisément que le froid augmente si l'esprit de vin descend dans le tube, & que s'il monte la chaleur est plus grande. Donc on peut faire un thermoscope qui fasse connoître les changemens de la chaleur & du froid dans l'air. *Ce qu'il falloit démontrer.*

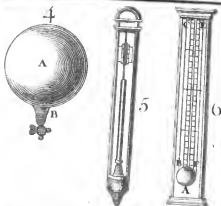
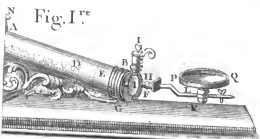
Remarque premiere.

50. Si l'esprit de vin descend beaucoup dans le tube, il est constant que l'air est considérablement refroidi, & qu'il est beaucoup plus chaud, à pro-

Hydrostatique.



Airometrie.





portion de ce que le même esprit de vin est monté. Mais comme on ne sçauroit connoître combien, par exemple, le degré de chaleur d'aujourd'hui est contenu de fois dans le degré de chaleur d'un autre jour, on ne peut pas dire dans ce sens que le thermoscope serve à mesurer la chaleur (§. 2.)

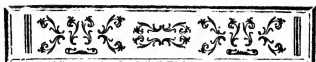
Remarque seconde.

§ 1. Au reste, quoiqu'on y remarque des changemens très-sensibles, particulièrement lorsque le tube est très-menu, de façon qu'on le voit très-notablement monter quand on applique la main sur le globe, & qu'il descend aussi-tôt qu'on l'en a retirée; on a néanmoins observé qu'après être beaucoup descendu pendant le grand froid, il reste assez long-tems au même degré, quoique la température de l'air soit beaucoup adoucie.

Remarque troisième.

§ 2. On désigne ordinairement sur la table des degrés de deux espèces, dont les uns marquent le commencement de la chaleur, & les autres le décroissement, ou le commencement du froid. On descend pour cela le Thermoscope dans une chambre basse ou dans une cave, & on l'y laisse toute la nuit. Le lendemain on marque le degré d'élévation de l'esprit de vin dans le tube, au-dessus duquel degré, comme temperé, on marque toujours en montant ceux de la chaleur, & au-dessous toujours en descendant les degrés du froid.

Fin de l'Airometrie.



E L E M E N S D'HYDRAULIQUE.

D E F I N I T I O N I.

1. **L'***Hydraulique* est la Science qui traite du mouvement des fluides, & plus particulièrement du mouvement des eaux.

D E F I N I T I O N I I.

2. Le *Tube* ou *Tuyau* est un cylindre creux;

P r o b l è m e I.

3. Elever les eaux par le moyen de la vis d'Archimède.

S o l u t i o n.

Pl. I.
Fig. 1.

1°. Entourez le cylindre AB d'un tuyau de plomb que vous adapterez en forme de vis (§. 90. Méch.)

2°. Fichez au bas du cylindre un clout long & rond, & vous attacherez en haut du même cylindre une manivelle avec laquelle on puisse le faire tourner.

3°. Donnez enfin une pente à ce cylindre d'environ

ren 45 degrés, & vous plongerez l'extrémité B dans l'eau que vous voudrez élever. C'est en tournant le cylindre par le moyen de la manivelle que vous ferez votre opération.

Démonstration.

En effet, si vous plongez dans l'eau l'ouverture inférieure du cylindre, l'eau par son propre poids doit couler en F, & tournant la vis, la même eau doit monter de F en G, de G en H, & ainsi par degrés jusqu'en A, ce que j'avois à démontrer.

Remarque.

4. Par le moyen de cette machine on puise à la vérité beaucoup d'eau avec peu de force; mais on ne la fait pas monter bien haut. On s'en sert fort commodément pour dessécher les marais.

Problème II.

5. Faire un chapelet pour faire monter l'eau.

Pl. I.
Fig. 1.

Solution.

1°. Plantez dans l'eau un tuyau de bois de la hauteur que vous voulez élever l'eau.

2°. Placez les deux cylindres GH & ED, celui-ci au fond de l'eau, & celui-la au-dessus du tuyau. Ces deux cylindres doivent être attachés à deux effieux de fer, autour desquels ils puissent tourner.

3°. Faites enfin passer autour des deux cylindres & en dedans du tuyau une corde ou une chaîne où seront attachés des globes de cuir de grosseur à pouvoir remplir la cavité du tuyau. Si l'on fait

tourner le cylindre GH , l'eau montera jusques en L.

Démonstration.

Le tuyau étant ouvert au point B , pour donner entrée au chapelet , l'eau y entre & monte à la hauteur de celle qui l'environne. (§. 15. Hydrost.) Or si vous faites tourner le cylindre GH , celui qui est au fond de l'eau ED doit tourner pareillement , & les globes du chapelet , doivent entrer dans le tuyau & en fermer l'issue à l'eau qui y est ; ils la poussent en haut : par conséquent , en montant eux mêmes, ils la font monter & la poussent jusques en L. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème III.

6. Faire monter l'eau par le moyen de petits seaux attachés à une chaîne.

Solution.

Fig. 3.

1°. Placez horizontalement au fond de l'eau un cylindre ou prisme exagone MN , qui puisse tourner autour d'un essieu de fer.

2°. Posez au lieu jusqu'où vous devez faire monter l'eau un pareil cylindre ou prisme OP , parallèle à l'autre , & tournant également sur un essieu de fer.

3°. Attachez des petits seaux aux chaînes qui doivent passer à l'entour de l'un & de l'autre cylindre.

4°. en tournant le cylindre qui est au-dessus de l'eau , celui qui est au fond tournera pareillement ; les petits seaux puiseront l'eau , & la porteront jusques en P , où elle s'écoulera dans quelque vaisseau placé pour la recevoir.

Remarque.

7. Il en coûte beaucoup pour l'entretien de la première machine, parce que les globes de cuir se gâtent facilement. Elle est d'ailleurs fort incommode en hiver, parce que les chaînes se brisent, & si l'on fait usage de cordes, elles se rompent encore plus aisément. Ce n'est pas le tout; il faut beaucoup de force pour entretenir cette machine en mouvement, pendant le tems nécessaire à l'effet qu'on se propose, parce qu'il s'y fait un grand frottement des parties dont la machine est composée.

Problème IV.

8. Faire monter l'eau par le moyen du tympan.

Solution.

1°. Construisez un tympan ou tambour avec des jantes & des rayons.

2°. Placez entre les doubles rayons des petits coffrets ou boîtes, bien fermés au-dessus, & percez des petits trous dans l'autre côté A, afin que l'eau puisse y entrer. Fig. 41

3°. Affermissez & clouez parfaitement par un côté le fond de ces boîtes sur les jantes; & vous le laisserez avancer un peu sur l'autre côté, pour pouvoir y laisser un trou quarré par lequel l'eau puisse s'écouler. Si l'on suspend cette roue sur l'eau, de façon qu'une partie de sa circonférence y soit plongée, & qu'on la mette ensuite en mouvement, les seaux se rempliront en passant dans l'eau, & se videront quand ils auront passé le haut de la machine.

Nous ne pouvons point parler dans cet abrégé de tous les tympans, dont on se sert pour puiser l'eau. Il y en a un grand nombre que nous passons sous silence.

Problème V.

9. Faire une *pompe aspirante*, par le moyen de laquelle on puisse élever en haut l'eau d'un puits ou autre lieu bas & profond.

Solution.

Pl. I.
Fig. 5.

1°. Plantez perpendiculairement dans l'eau un tuyau de bois ABCD.

2°. Mettez au bas de ce tuyau DC une *soupape* I qui ne puisse s'ouvrir que par le haut.

3°. Attachez à la verge de fer EL le piston creux LK, qui doit être assez gros pour remplir exactement le dedans du corps du tuyau, enforte que l'eau ne puisse point passer entre deux.

4°. Faites une autre soupape au-dessus en L; si vous haussiez & baissiez le piston dans le tuyau, l'eau montera jusqu'au haut du tuyau.

Démonstration.

En haussant le piston il laisse un espace vuide d'air dans le tuyau, & l'air pressant l'eau, elle est obligée de monter dans le tuyau pour remplir ce vuide, & leve en montant la soupape I. (§. 27. Aïrom.) le piston étant une seconde fois baissé, la soupape inférieure I se ferme & celle qui est au-dessus doit s'ouvrir & laisser monter l'eau; ainsi en réitérant les mouvemens du piston, l'eau doit monter jusqu'en MH & se répandre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

10. Les *soupapes* les plus simples sont rondes & faites de cuir, on les attache par leurs anses à l'ouverture du piston. On en fait encore de cuivre couvertes d'un cuir mince, & mobiles par le moyen d'une charnière D : mais pour qu'elles se ferment plus sûrement on met un ressort au point G. Pl. I.
Fig. 6. & 7.

Problème VI.

11. Faire une pompe foulante qui pousse l'eau bien haut.

Solution.

1°. Faites deux cylindres de laiton ABCD au fond desquels DC vous mettrez des *soupapes*. Pl. I.
Fig. 8.

2°. Soudez à chacun un tuyau garni de *soupapes* en H & I qui s'ouvrent en haut.

3°. Mettez dans l'un & dans l'autre un piston K qui en remplisse exactement la cavité, pour que l'eau ne puisse passer entre deux.

Démonstration.

Quand'on hausse le piston, la *soupape* qui est au fond s'ouvre, & l'air extérieur pousse l'eau dans le cylindre : (§. 29. Aïrom.) mais lorsqu'on baisse le piston, la *soupape* L se referme, & l'eau est chassée par le tuyau qui est à côté ; elle ouvre les *soupapes* IH, & monte plus haut par le tuyau N.

Remarque première.

12. On peut faire encore une *soupape* de cette façon. On fait par le moyen du Tour un trou A, Fig. 9.
A a iij

en forme de cône tronqué, au bas du cylindre, & l'on y place un cône tronqué de laiton travaillé au tour, & armé d'un clou ou cheville D, qui l'empêche de tourner. Ou bien on perce un trou hémisphérique où l'on met un globe de laiton qui le remplisse exactement.

Remarque seconde.

13. Pour faire une pompe d'où l'eau coule sans cesse & avec vitesse, on ajuste deux cylindres avec leurs pistons, de manière que l'un monte quand l'autre baisse; & par ce moyen l'eau monte sans interruption. On se sert de cette machine pour éteindre le feu dans les incendies, & pour les autres machines qui regardent les eaux.

DEFINITION III.

14. Par les ouvrages à eau nous entendons une machine par le moyen de laquelle on fait couler l'eau dans les lieux voisins, par exemple, dans toutes les fontaines d'une maison; comme la Samaritaine à Paris.

Problème VII.

15. Faire un ouvrage à eau, ou un réservoir pour la distribution des eaux.

Solution.

1°. Elevez une tour ou autre édifice au-dessus du niveau des eaux, & d'une hauteur proportionnée à la pente requise, pour qu'elles puissent couler de cette tour dans les lieux proposés.

2°. Faites monter l'eau dans cette tour ou dans cet édifice, par le moyen ou du chapelet, (§. 5.)

D'HYDRAULIQUE. 375

ou des petits seaux attachés à des chaînes, (§. 6.) ou du tympan, (§. 8.) ou des pompes, (§. 9. 11.) lesquelles machines vous appliquerez par les puissances animées ou inanimées, selon les règles de la Méchanique que nous avons données dans les *Elemens de Méchanique*, §. 109. 110. 120. & dans les suivans.

3°. Il faut ramasser l'eau dans un réservoir de plomb ou de cuivre, au fond duquel il y ait des tuyaux par lesquels elle puisse descendre.

4°. Pour que l'eau ne monte point au-dessus des bords du réservoir, il faut mettre un ou deux tuyaux presque au niveau des bords, & elle s'écoulera par les tuyaux dans le fleuve d'où on la puise.

5°. Ces tuyaux verticaux doivent être adaptés à d'autres tuyaux horifontaux ou inclinés, cachés sous la terre, & qui viennent jusqu'aux endroits où l'on veut conduire les eaux.

6°. L'eau étant enfin parvenue à l'endroit où on veut la faire couler, on doit élever des tuyaux verticaux sur les horifontaux, avec lesquels ils doivent avoir une communication; par ce moyen l'eau montera dans ces tuyaux: (§. 15. Hydrofl.) & vous aurez perfectionné l'ouvrage à eau. (§. 14.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque premiere.

16. On devroit avoir dans les maisons des canaux grands comme des puits, & mettre dans les canaux horifontaux des pistons qu'on pût ouvrir ou fermer par le moyen d'une verge de fer. On pourroit ainsi faire couler les eaux, ou en arrêter le cours. Il faut avoir soin en Hyver de couvrir ces tuyaux de fumier ou de paille, pour que l'eau ne se gèle point.

Corollaire.

17. Comme l'expérience nous apprend que l'eau monte presque à la même hauteur d'où elle est descendue, on pourra faire des fontaines jaillissantes en élevant les eaux par la machine que nous avons décrit; & la conduisant par des canaux de cuivre ou de plomb jusqu'à la fontaine d'où elles doivent jaillir.

Remarque seconde.

18. Selon les principes de l'Hydrostatique, (§. 15. Hydrost.) l'eau devrait remonter à la même hauteur précisément d'où elle étoit tombée; mais l'expérience est contraire, & nous fait voir qu'elle monte moins haut; si même le canal est trop grand à raison de la force qui comprime, elle ne jaillira point du tout, & ne fera que couler: nous ne chercherons point ici les raisons d'une telle expérience.

Problème VIII.

19. Construire, pour l'agrément, des fontaines jaillissantes qui représentent diverses figures.

Solution.

Comme l'eau qui jaillit prend la figure que lui donne l'ouverture du tuyau, & qu'elle conserve la direction qu'elle en reçoit; tout dépend donc de la forme de l'ouverture du tuyau & de sa direction.

1°. Si l'on veut faire monter l'eau en forme de verge, il faut élever un tuyau perpendiculaire à l'horison. Si l'eau sort du tuyau avec assez de force

& de rapidité , on peut mettre une boule creuse & fort légère de cuivre doré sur le jet qui la soutiendra perpendiculairement comme suspendue en l'air , & dans un mouvement continuél , pourvû qu'elle ne soit point trop exposée au vent : on peut encore placer un entonnoir à l'ouverture du tuyau , afin que si cette boule venoit à tomber , l'eau puisse la faire remonter : c'est ainsi que l'eau jouera à la paume , (pour ainsi dire) avec la boule.

2°. Si vous voulez faire jaillir l'eau de tous les côtés , il faut se servir de plusieurs petits tuyaux que vous placerez les uns verticalement , les autres horizontalement , & les autres formeront tel angle que vous voudrez. Vous pourrez encore mettre au bout du tuyau un ajutage fait comme un hémisphère ou comme un cône fermé à sa partie supérieure , ou un cylindre percé de plusieurs petites ouvertures : par le moyen de ces machines l'eau doit se répandre de tous les côtés en forme de petits filets.

3°. On peut représenter l'arc-en-ciel en formant cet ajutage de façon que l'eau en retombe toute en petites gouttes ; car pour lors , si on se place entre le soleil & la fontaine , les rayons du soleil frappans sur cette espèce de pluie , feront appercevoir les couleurs de l'arc - en - ciel. Pour réussir à faire tomber l'eau en petites gouttes , il faut la faire jaillir par une infinité de très-petits trous , ou par un seul tout raboteux , ou la faire tomber sur quelque hémisphère ou toit rond , d'où elle puisse se répandre de tous les côtés.

4°. Vous pourrez enfin former une nape d'eau , en la faisant passer par une fente étroite & polie.

On trouve dans l'*Architecture curieuse* de Boëcler plusieurs autres manieres d'orner les fontaines.

Problème IX.

20. Faire un vase propre à arroser les jardins.

*Solution.*Pl. II.
Fig. 10

1°. Faites un vase sphérique HB, ou de telle autre figure que vous voudrez, pourvu qu'il ait un cou un peu étroit HE, & que le fond de l'hémisphère soit percé de plusieurs petits trous en DB.

2°. Soudez au col du vase un tuyau E qu'on puisse boucher avec le pouce. Je dis que si vous plongez ce vase dans l'eau, elle entrera par les petits trous; & si vous le retirez de l'eau, & que vous bouchiez le petit tuyau avec le pouce, il n'en sortira pas une seule goutte; mais enfin si vous retirez le pouce, l'eau s'écoulera comme une rosée par les petites ouvertures, & par conséquent cette machine est très-utile pour arroser les jardins.

Démonstration.

Si vous plongez le vase dans l'eau jusqu'au tuyau ouvert en E, il se remplira par les petits trous jusqu'à ce que l'eau qui y est entrée soit au niveau de celle qui l'environne (§. 15. Hydrost.) mais si mettant le pouce sur l'ouverture E vous retirez le vase, comme sa hauteur ne passe point un ou deux pieds, & les trous étant assez petits pour empêcher l'air d'entrer, si l'eau venoit à couler, l'air extérieur doit absolument empêcher que l'eau ne sorte. Si vous retirez le pouce, la colonne entière d'air qui prend depuis l'ouverture E jusqu'à l'extrémité de l'atmosphère doit graviter sur l'eau du vase; & pesant avec cette eau, elle gravitera sur le fond DB: ainsi la pression de l'air qui passe

par l'ouverture du vase étant égale à la résistance de l'air qui presse au fond, (§. 15. Hydrost.) le poids de l'eau l'emportera sur la résistance, par conséquent l'eau s'écoulera par le fond du vase. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Problème X.

21. Faire un siphon, c'est-à-dire, une machine par le moyen de laquelle On puisse vider la liqueur d'un vase.

Solution.

Faites un vase FE dont le milieu ABCD ait la figure d'un cylindre, & dont les extrémités AFB, Fig. 15. & CED ayent celle d'un cône tronqué. Que les ouvertures F & E ne soient pas plus grandes qu'il le faut pour être bouchées avec le doigt.

Je dis que si vous plongez ce vase dans une liqueur il s'en remplira, quoique l'orifice supérieur soit beaucoup au-dessus. Et que mettant le doigt sur l'orifice F, & retirant ce vase, la liqueur ne coulera point, mais que si vous retirez le doigt, elle se répandra entièrement.

Démonstration.

C'est la même que celle du Problème précédent.

Théorème I.

22. Si vous plongez dans une liqueur la bran- Fig. 12. che la plus courte d'un tuyau recourbé, & que vous succiez l'air par l'ouverture C, la liqueur montera dans la branche qui trempe dans le vase, & elle coulera autant de tems par le tuyau BC que

L'ouverture A y fera plongée , & que la liqueur fera à une plus grande hauteur que l'ouverture C.

Démonstration.

Si vous succez l'air , le siphon sera vuide ; ainsi l'air extérieur pressant l'eau qui est dans le vase , (§. 18. Aïrom.) & ne trouvant aucune résistance dans le siphon , il la fera monter dans la branche AB, d'où par sa propre gravité elle descendra par la branche BC ; & comme l'air presse autant en A qu'en C , & que l'eau au contraire qui est dans la branche BC , presse plus vers C que celle qui est dans la branche AB ne presse vers A , parce que la perpendiculaire de celle-là est plus grande que la perpendiculaire de celle-ci (§. 17. Hydrost.) il faut nécessairement que l'eau coule par le bout C , jusqu'à ce que l'air puisse entrer par le bout A dans le siphon , & surmonter l'inégalité de la pression. (§. 13. Hydrost.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque première.

23. Il importe peu que l'une ou l'autre branche du siphon , ou même que toutes les deux branches soient recourbées , pourvu que l'orifice soit plus bas que la superficie de l'eau qu'on veut puiser. (§. 17. Hydrost.)

Remarque seconde.

Fig. 13. 24. On change quelque fois la figure du siphon , & à la place de la branche la plus courte on fait un gros tuyau RS, soudé au fond du vase TV, n'ayant qu'un orifice en R. Dès que l'eau a commencé à couler par le tuyau PQ , elle continue à se répan-

dre , jusqu'à ce que l'air puisse pénétrer par l'orifice R dans le grand tuyau. C'est pourquoi on appelle ce siphon *Diabetes*.

Problème XI.

25. Faire une fontaine intermittente , c'est-à-dire une fontaine qui coule à diverses reprises.

Solution.

1°. Faites passer dans un vase rond un tuyau FHM *Fig. 14.* que vous souderez au milieu du fond de ce vase , & dont les deux extrémités étant ouvertes , la première ira presque toucher le couvercle.

2°. Soudez l'orifice inférieur au bassin CD d'où l'eau puisse couler par un petit trou fait au milieu dans un vase que vous placerez au-dessous. Faites aussi un petit trou au tuyau FHM fort près du bassin.

3°. Qu'il y ait une ouverture garnie d'une vis au couvercle du vase , par où vous puissiez faire entrer l'eau , & que le fond du vase soit percé de plusieurs trous qui donnent passage à l'eau.

Si vous remplissez le vase supérieur , l'eau tombe en gouttes par les petits trous dans le bassin , & bouchant la petite ouverture M , empêchera que l'air ne puisse aller prendre sa place , & par conséquent elle cessera de couler : cependant celle qui est dans le bassin tombera dans le vase inférieur , & dès que l'ouverture inférieure du tuyau M sera dégagée , & que l'air pourra pénétrer dans le vase supérieur , l'eau recommencera à couler par les petits trous comme auparavant.

Problème XII.

26. Faire une fontaine jaillissante dans un vase de verre fermé.

Solution.

1°. Ayez une boule creuse de verre dont l'ouverture soit garnie d'une vis BE.

Fig. 15.

2°. Faites passer dans la vis un petit tube DC, ayant l'ouverture C fort petite, & celle de l'autre bout D qui sort du verre beaucoup plus grande.

3°. Soudez à la même vis un tube EF, large vers le bout E, & menu vers F, mais long au double de l'autre.

4°. Faites une communication entre les deux vases IK & LM par le moyen du tube HN, & soudez à la base du supérieur le tube GH, dans lequel vous introduirez le tube EF, de façon qu'il descende jusqu'au vase inférieur.

Si vous remplissez d'eau le vase IK & environ le tiers du globe A, elle descendra du globe par le tube EF dans le vase LM, & montera dans la boule par le petit tube DC en jaillissant par l'ouverture C.

Problème XIII.

27. Mettre l'eau en mouvement par la force élastique de l'air.

Solution.

Fig. 16.

1°. Faites un vase cylindrique de cuivre & solide ADBC dont les deux fonds AB & CD soient bien forts.

2°. Menagez dans le fond CD un trou garni d'une vis pour servir de bouchon, & par lequel vous puissiez y verser de l'eau.

3°. Soudez au fond du haut AB, le tube FE, qui descende presque jusqu'au fond CD, & dont la partie F qui s'élève au-dessus du vase, soit faite en vis, afin de pouvoir y adapter non-seulement une pompe foulante, mais encore le robinet F qui doit donner ou fermer le passage à l'air & à l'eau renfermés dans le vase.

Si le vaisseau étant ainsi préparé vous y comprimez l'air par le moyen d'une pompe ou seringue (§. 42. Airom.) & qu'après l'avoir retirée vous adaptiez en F le petit tube dont l'ouverture sera très-petite, & qu'ensuite vous ouvriez le robinet, l'air fera sortir l'eau par le tube F avec beaucoup d'impétuosité.

Démonstration.

L'élasticité de l'air se bande extrêmement par la compression (§. 24. Airom.) & comme il presse infiniment plus que l'air extérieur ne résiste, il faut absolument qu'il chasse l'eau hors du vase, jusqu'à ce qu'ayant acquis une densité égale à l'air extérieur, il se trouve en équilibre avec lui. (§. 13. Hydrost.) *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autre Méthode.

Ayez un globe creux de verre double AB, à l'ouverture A duquel vous attacherez avec du ciment un tube aussi de verre CD, dont le bout C & son ouverture seront très-petits, & iront en s'élargissant un peu jusqu'au fond du globe. Si après l'avoir presque tout rempli d'eau vous compri-
Fig. 19.
mez l'air qui y est renfermé en soufflant fortement dedans avec la bouche. Dès que vous l'aurez retirée, l'eau sortira du vase comme une fontaine.

Démonstration.

Elle est la même que la précédente.

Remarque premiere.

28. On peut faire le globe de cuivre au lieu de verre, & pour lors il n'est pas nécessaire de faire descendre le tube dedans le globe. On nomme cette machine *æolipile*. Pour la mettre en usage, on fait chauffer ce globe sur un réchaud; on plonge ensuite l'orifice C dans l'eau, & peu à peu le globe se remplit. Lorsqu'il est presque plein on le remet sur le feu, & quand il a acquis un certain degré de chaleur, l'air se dilatant, & trouvant l'eau qui s'oppose à sa sortie, il la chasse par l'orifice C à la hauteur d'une douzaine de pieds. Si au lieu d'eau on remplit le globe d'esprit de vin ou de la fine eau de vie, & qu'on approche une bougie allumée de l'orifice C, pendant que l'air la fait sortir, au lieu d'un jet d'eau, l'esprit de vin forme un jet de feu.

Remarque seconde.

29. Le verre ne pouvant résister à l'action du feu, pour remplir le globe de verre, il faut en suc-
cer l'air à diverses reprises autant qu'on le pourra, & plonger aussi-tôt l'orifice dans l'eau; car l'air extérieur forcera, par sa pression, l'eau d'entrer en aussi grande quantité que celle de l'air que vous en avez pompé en suçant. (§. 34. Airom.)

Problème XIV.

30. Faire une fontaine jaillissante, d'où l'eau
qui

qui fort est obligée de rentrer avec celle qui demeure.

Solution.

Mettez l'un sur l'autre , & joignez bien ensemble deux vases PR & HQ. Qu'il y ait un espace entre deux , ou qu'il n'y en aye pas , n'importe. S'il y en a , affermissiez-les l'un sur l'autre avec des colonnes bien soudées. Fig. 17.

2°. Soudez au couvercle du vase supérieur (lequel couvercle doit être concave & fait en forme de bassin) le tube DL ouvert par les deux bouts , & qui descendra presque jusqu'au fond du vase inférieur HQ.

3°. Soudez au couvercle du vase inférieur le tube FM , ouvert aussi par les deux bouts , & qui montera presque jusqu'au couvercle du vase supérieur PD.

1°. Soudez enfin au milieu du couvercle du vase supérieur le tube AC , qui sera aussi ouvert par les deux bouts ; mais dont l'ouverture A sera très-petite , & l'autre de la largeur du tube , qui doit descendre presque jusqu'au fond du vase supérieur HR.

Si après avoir rempli d'eau le vase supérieur ; vous en jetez ensuite sur son couvercle KO , l'eau commencera à jaillir par l'ouverture A , & il en sortira autant qu'il y en aura dans le vase supérieur.

Démonstration.

Pendant que l'air du bassin KO s'insinue par le tube DL , elle chasse l'air du vase HQ , & le faisant passer par le tube FM , elle le pousse dans le vase supérieur ; & parce que la pression de l'eau le

comprime, son élasticité se bande (§. 24. Airom.) Or l'air extérieur pressant avec moins de force en A que l'air renfermé dans le vase PR; il faut nécessairement que l'eau sorte par l'orifice A, & cette eau qui sort retombant sur le bassin KO, elle entre de nouveau par le tube DL, & chasse l'air du vase inférieur dans le supérieur, par le tube FM. Il en jaillira donc autant qu'il s'en trouvera dans le vase supérieur, & de cette façon l'eau qui sort rentre avec celle qui demeure. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

31. On croit qu'Heron d'Alexandrie fut l'inventeur de cette fontaine ingénieuse; c'est pourquoi on la nomme la *Fontaine de Heron*. L'eau en sort par la même raison que nous avons rapportée dans le §. 27. excepté que dans le cas présent l'air se trouve comprimé par la pesanteur de l'eau qui s'introduit par le tube DL.

Problème XV.

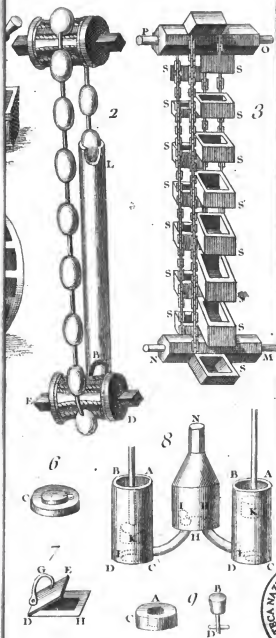
32. Faire une fontaine jaillissante par le moyen de l'air rarefié par la chaleur.

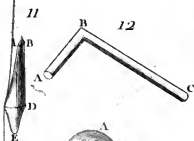
Solution.

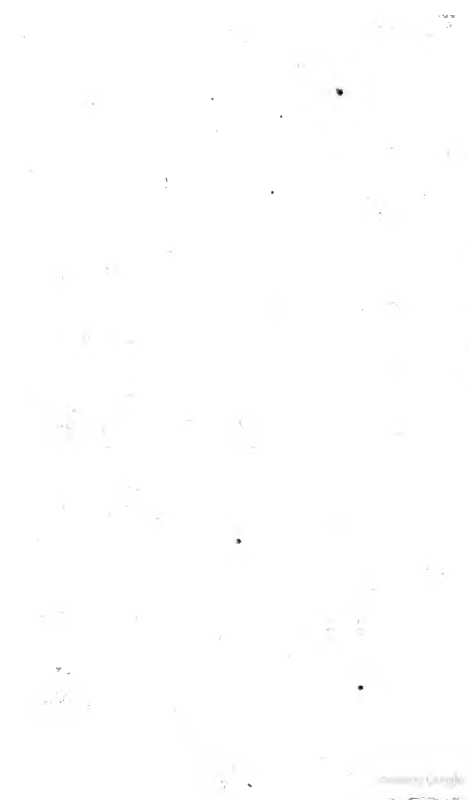
1°. Ayez deux vases ABCD, & CDEF, séparez l'un de l'autre uniquement par le fond du vase supérieur, sur lequel vous souderez un bassin AGHB de même capacité que le vase.

2°. Adaptez au fond du vase supérieur un tube ouvert IK qui communique d'un vase à l'autre, & dont le bout K ne monte pas jusqu'au couvercle du vase supérieur. Soudez au milieu du bassin un autre tube dont l'extrémité M s'élève au-dessus du bassin,

Pl. II.
Fig. 18.







D'HYDRAULIQUE. 387

n'ayant qu'une petite ouverture, & dont l'autre bout plus ouvert descende presque jusqu'au fond du vase supérieur CD.

Si vous posez cette machine sur des charbons allumés après avoir rempli d'eau le vase supérieur, celle du vase AD sortira par l'orifice M du tube ML, & elle tombera dans le bassin GH.

Démonstration.

La chaleur raréfiant l'air renfermé dans le vase inférieur CDEF, bande son élasticité (§. 45. Airom.) Cette élasticité comprime avec plus de force l'eau renfermée dans le vase AD, que l'air extérieur ne résiste à l'orifice M; par conséquent l'eau doit sortir par le tube LM. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

On ne s'est pas fort étendu sur l'Hydraulique dans cette traduction. Ceux qui voudront s'instruire parfaitement de cette partie des Mathématiques, pourront l'étudier dans l'Architecture Hydraulique de M. Belidor, qui ne laisse rien à désirer sur cette matière.

Fin de l'Hydraulique.

Bbij

AOI 146 1416

F A U T E S A * C O R R I G E R

dans le premier Volume.

- P** A G E 38, ligne 15 $\frac{11}{13}$ lisez $\frac{12}{13}$.
 Page 46, lig. 14, donc, *lif.* dont.
 Page 47, lig. 14, mettez un point & une virgule après quotient.
 Page 112 lig 8, — *ab lif.* + *ab*,
 Pag. 125, lig. 8. $x = \frac{260}{300}$ *lif.* $\frac{800}{300}$
 Page 128, lig. 2, égal, *lif.* égale.
 Page 144, ligne dernière arc *lif.* l'arc.
 Page 168, au bas de la marge, Pl. III. *lif.* Pl. II.
 Page 191, lig. 5, ajoutez Δ avant BCD
 Page 205, lig. 26 EA : AF = CD *lif.* = EC
 Page 222, lig. 5. 144, *lif.* 44.
Ibid. ligne pénult. Mesurez, *lif.* Meñez.
 Page 235, lig. 17. 802, *lif.* 8920.
 Pag. 55, ligne dernière, le sinus, *lif.* les sinus.
 Page 162, lig 12, 28, *lif.* 29.
 Page 279, à la marge, Pl. V. *lif.* Pl. I.
 Page 288, lig. 18. = C, *lif.* = G.
 Page 295, lig. 2, 36 *lif.* 56.
 Page 311, lig. 9. 342, *lif.* 432.
Ibid. lig 11, effacez 280.
 Page 313, lig. 6, le point, *lif.* le poids.
 Pag. 319, lig. 26, 58, *lif.* 58ⁿ
 Page 326, lig. 26, mettre en mouvement une machine élastique, *lif.* par la force élastique.
 Pag. 379, à la marge, Fig. 15, *lif.* Fig. 11.



1461416





